Par(ab)oles... Par(ab)oles...

Karim Zayana, Ivan Boyer, Pierre-Jean Hormière, Victor Rabiet

▶ **To cite this version:**

Karim Zayana, Ivan Boyer, Pierre-Jean Hormière, Victor Rabiet. Par(ab)oles... Par(ab)oles.... 2022. hal-03668077

HAL Id: hal-03668077

https://telecom-paris.hal.science/hal-03668077

Submitted on 14 May 2022

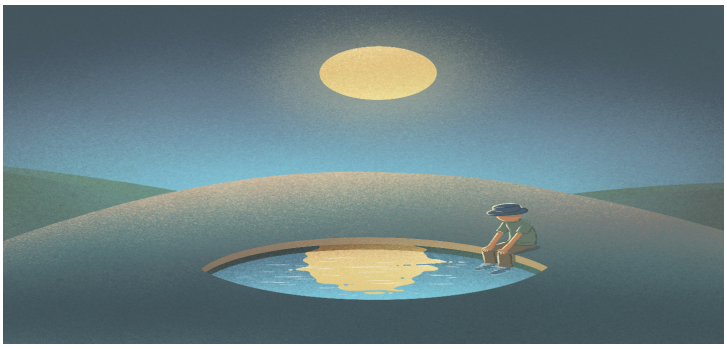
HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Par(ab)oles. . . Par(ab)oles. . .

Karim ZAYANA[1,2], Ivan BOYER[1], Pierre-Jean HORMIÈRE[1] et Victor RABIET[1,3]

[1] Ministère de l'Éducation nationale, Paris
[2] LTCI, Télécom Paris, Institut Polytechnique de Paris
[3] DMA, École normale supérieure, Paris



1 À la racine du mot

Comme ses cousines l'ellipse et l'hyperbole, la parabole est une figure de style avant d'être une conique. Le mot, issu du grec ancien, accole au préfixe "para", à savoir « contre/ à côté », qu'on retrouve dans « parasol », « paratonnerre » ou « parallèle », le suffixe "ballein", à savoir « jeter », qu'on retrouve dans « discobole », « balle » ou « balistique ». Il renvoie à l'exercice, érigé en art dans l'Antiquité, d'agencer des phrases et des images en regard les unes des autres pour en faire un récit, le cas échéant mythologique ou allégorique. Une évolution vers des formes aux sens plus populaires, mais non moins universels [5], donna les « paroles » et les « palabres ». Mais avant, c'est aussi à cette époque reculée qu'Aristée[1] puis Apollonius[2] conçurent d'intersecter le plan et le cône. En plaçant le premier en regard du second dans une position limite, *para*llèle à l'une des obliques de son profil, on obtient la *para*bole. Au-dessus (*hyper* est ce qui est au-delà) de cette ligne naissent les *hyper*boles, au-dessous ("elleipsis" est ce qui est en moins) les *ellipses*, figure 1.

1. ARISTÉE ; savant grec ayant vécu au IV^e^ siècle avant J.-C.
2. APOLLONIUS ; savant grec ayant vécu au III^e^ siècle avant J.-C.

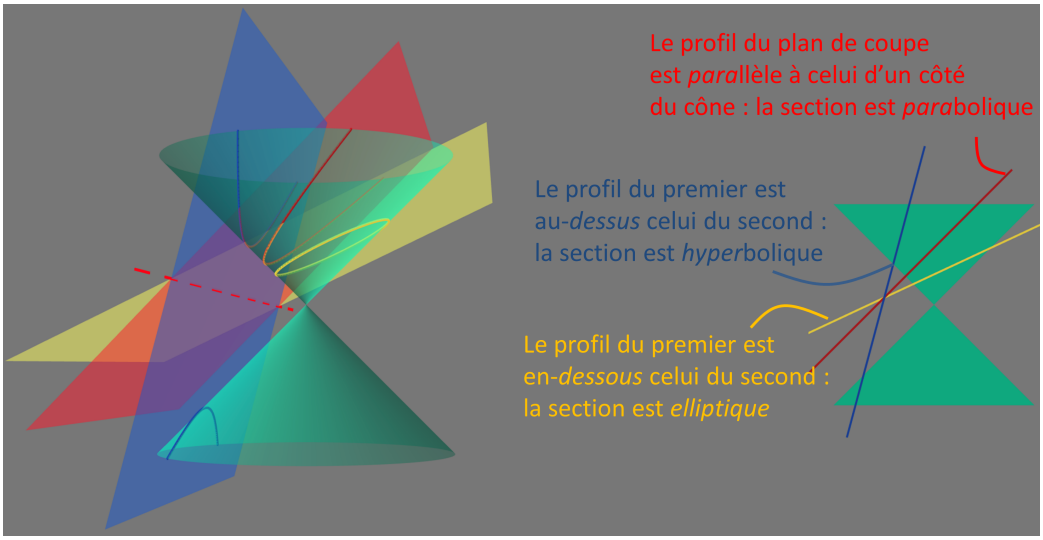


FIGURE 1 – Les coniques en tant que sections planes d'un cône de révolution. La figure s'anime grâce à deux appliquettes Javascript / WebGL conçues pour l'occasion, disponibles sur le site CultureMath et accompagnées d'une capsule vidéo explicative détaillant leur prise en main.

Il serait tentant de rechercher d'autres étymologies au mot « parabole ». Par exemple, que « poser/ jeter à côté », comme expliqué précédemment, évoque la courbe que décrit un objet « lancé par devant soi » ; ou bien rappelle la construction des coniques comme lieu géométrique obtenu via la « projection d'un point vers » un axe (en l'espèce, la directrice). Vraisemblablement, ce sont des raccourcis logiques et historiques. Dans le film et somptueux péplum, Agora [1], le cinéaste Alejandro Amenábar s'est plu à imaginer qu'Hypatie [3], voilà mille-six-cents ans, était sur les traces de Kepler [4] et de Newton [5], et que la mort de son héroïne aurait interrompu pour longtemps l'élan de la recherche. Sans le développement de la géométrie analytique, le lien entre sections coniques d'une part, et définitions homofocale ou bifocale des coniques d'autre part, avait ce-

3. HYPATIE ; mathématicienne, astronome et philosophe grecque ayant vécu aux III^e^ et IV^e^ siècle après J.-C. Elle est morte assassinée dans une embuscade ourdie contre elle par une cabale politique et religieuse.

4. Johannes KEPLER ; physicien et mathématicien allemand, 1571 – 1630. Il est célèbre pour avoir caractérisé le mouvement des planètes.

5. Isaac NEWTON ; physicien et mathématicien anglais, 1642 – 1727. Ses travaux sur la gravitation ont notamment permis d'expliquer les lois de Kepler.

pendant toutes les raisons d'être flou. Il aura fallu des siècles de décantation pour que Dandelin [6] trouve une passerelle directe [2, 3], reposant sur des sphères. En revanche, sur une parabole, initialement définie par section conique donc, la dépendance quadratique entre abscisse et ordonnée – deux mots d'origine grecs en fait très antérieurs à Descartes [7] – était, elle, connue bien avant notre ère [6, 7].

2 Aux racines de l'algèbre et de l'analyse

Dans ce qu'on considère être le premier traité d'algèbre, Al Khawarizmi [8] détaille par le menu un procédé d'extraction des racines d'une équation du second degré particulière : $x^2 + 10x = 39$ [4]. Interprétation géométrique à l'appui, sa méthode préfigure la mise sous forme canonique par complétion du carré, méthode étudiée aujourd'hui en classe de Première [8]. Le calcul du discriminant et l'habituelle discussion qui porte sur son signe en découlent et sont en général traités au sein du même chapitre. À un moment ou à un autre du déroulé du programme cependant, il s'agira d'articuler ces considérations purement algébrique aux outils puissants de l'analyse auxquels l'élève commence à accéder à ce stade de sa scolarité. En voici quelques pistes. Soit donc la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

avec $a \neq 0$.

Variations, extremum, allure selon le signe du coefficient de x^2. Ces capacités sont attendues des textes officiels. En résumé, l'application f se dérive en $f'(x) = 2ax + b$, expression affine dont la transition de signe se produit en $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Selon que le coefficient dominant a est positif ou négatif, la courbe de f est « souriante » ou bien « contrariée » et présente en x_0 un minimum ou un maximum, figures 2 et 3. Approfondissons désormais.

6. Germinal Pierre Dandelin ; mathématicien belge, 1794 – 1847.

7. René Descartes, 1596 – 1650, savant et pilosophe français, éponyme des fameuses coordonnées. On appréciera son anagramme : Tendre Caresse.

8. Mohammed El Khawarizmi ; mathématicien ouzbéko-bagdadi, 788–850. Son œuvre est à l'origine du mot « algèbre » et son nom de famille, du mot « algorithme » (lequel n'a donc pas de rapport avec « arithmétique » ou « logarithme »), transcriptions latinisées de l'arabe.

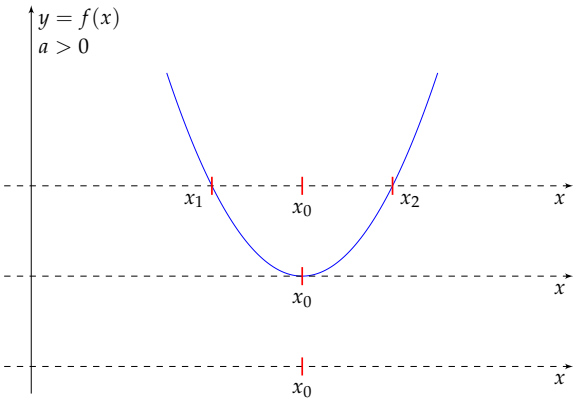


FIGURE 2 – Un sourire, c'est positif ! $a > 0$. Trois positions sont ici représentées, selon que la parabole traverse, tangente ou évite l'axe des abscisses (qui apparaît en pointillés).

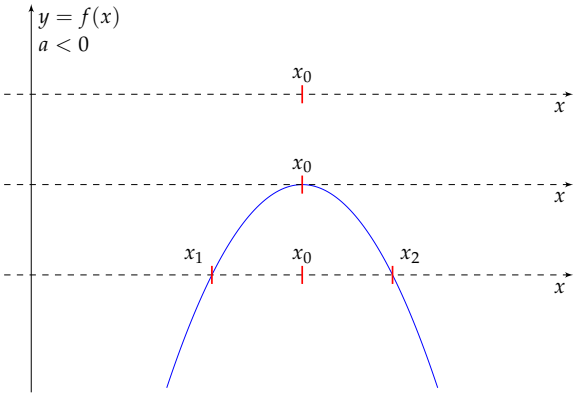


FIGURE 3 – Une grimace, c'est négatif ! $a < 0$. Trois positions sont ici représentées, selon que la parabole traverse, tangente ou évite l'axe des abscisses (qui apparaît en pointillés).

Discriminant Δ et discussion. Le paragraphe précédent permet, à lui seul, de faire émerger la quantité Δ et d'en donner l'usage. En effet, pour que la branche parabolique traverse l'axe des abscisses, il faut et il suffit que l'extremum $f(x_0)$ et le coefficient a soient en opposition de signe, soit :

$$f(-\frac{b}{2a}) \times a < 0,$$

ou encore

$$(-\frac{b^2}{4a} + c) \times a < 0,$$

qui revient à

$$b^2 - 4ac > 0.$$

Le cas échéant f possède deux racines x_1 et x_2, une à gauche strictement de x_0, l'autre à droite, figures 2 et 3.

Axe de symétrie, somme et produit des racines. Dès l'instant que les pentes de f se répondent de part et d'autre et à égale distance de x_0, il est assez concevable que le tracé de f y gagne une symétrie axiale, figures 2 et 3. L'argument est certes heuristique, mais il peut suffire à convaincre dans un premier temps. Moyennant la condition $\Delta > 0$, les deux racines mises en évidence ci-dessus ont donc exactement pour milieu x_0. Ainsi,

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Le produit peut, lui, tomber de différentes manières. Via une factorisation par exemple, suivie d'un développement et d'un principe d'identification – ce qui nécessite malgré tout quelques prérequis, ou tout simplement en retranchant à l'égalité $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$ pondérée de x_2 son égalité jumelle $ax_2^2 + bx_2 + c = 0$ pondérée de x_1. En résulte

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Racines. La somme de x_1 et x_2 une fois déterminée, il est naturel d'introduire la variable auxiliaire u, qui mesure un écart à la moyenne, en posant [9] :

$$x_1 = \frac{-b}{2a} - u \text{ et } x_2 = \frac{-b}{2a} + u.$$

Du reste, on peut exiger de u d'avoir le signe de a ; ceci ordonnera x_1 et x_2. Voilà qui, associé à la connaissance du produit $x_1 x_2$, fournit l'identité

$$x_1 x_2 = \frac{b^2}{4a^2} - u^2 = \frac{c}{a}.$$

Dès lors,

$$u^2 = \frac{\Delta}{4a^2},$$

donc

$$u = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

et la boucle est bouclée puisqu'on retombe ainsi sur les célèbrissimes formules...

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

... enfin aux exceptions près pour lesquelles il y a moyen d'accélérer, telles les équations $x^2 - a^2 = 0$, $x^2 - 2ax = 0$ ou $x^2 \pm 2ax + a^2 = 0$ où a est un réel donné.

Karim ZAYANA est inspecteur général de l'éducation, du sport et de la recherche (groupe des mathématiques) et professeur invité à l'institut polytechnique de Paris (Palaiseau) ; Ivan BOYER est professeur de mathématiques en classe préparatoire première année au lycée Saint-Louis (Paris) ; Pierre-Jean HORMIÈRE est professeur honoraire en classe de spéciale MP* au lycée Fauriel (Saint-Étienne) et Victor RABIET est responsable éditorial du site expert ENS-DGESCO CultureMath.

Remerciements

Les auteurs remercient Catherine GUFFLET, inspectrice d'académie – inspectrice pédagogique régionale de mathématiques dans l'académie de Versailles pour sa relecture très précise du texte.

Références

[1] Alejandro AMENÁBAR. *Agora*. Mars Distribution, 2009.

[2] Marcel BERGER. *Géométrie I et II*. Nathan, 1990.

[3] Pierre-Louis BOILEAU et Thomas NARCEJAC. *Le train bleu s'arrête 13 fois*. Denoël, 1966.

[4] Jean-Luc CHABERT et al. *Histoire d'algorithmes*. Belin, 1994.

[5] DALIDA, Alain DELON, MICHAËLE et Gianni FERRIO. « Paroles...Paroles... » In : *Barclay* (1972).

[6] James GOW. *Greek Mathematics*. Cambridge, 1884.

[7] Thomas HEATH. *A history of greek mathematics, volume II*. Dover Publications, 1981.

[8] « Programme d'enseignement de spécialité de mathématiques de la classe de Première de la voie générale ». In : *Bulletin officiel spécial n°1 du 22 janvier 2019* (2019). URL : https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special1/MENE1901632A.htm.

[9] Karim ZAYANA et Victor RABIET. « Somme et produit, couple star ». In : *CultureMath* (2021).