



L'aire du changement

Karim Zayana, Ivan Boyer, Victor Rabiet

► To cite this version:

| Karim Zayana, Ivan Boyer, Victor Rabiet. L'aire du changement. 2021. hal-03283748

HAL Id: hal-03283748

<https://telecom-paris.hal.science/hal-03283748>

Submitted on 12 Jul 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

L'aire du changement

Karim ZAYANA^{1,2}, Ivan BOYER¹ et Victor RABIET^{1,3}

¹ Ministère de l'Éducation nationale, Paris

² LTCI, Télécom Paris, Institut Polytechnique de Paris

³ DMA, École normale supérieure, Paris



Le changement de variable est aux intégrales ce que la réindexation, le groupement ou le dédoublement de termes peuvent être aux sommes discrètes. Mais l'outil débouche sur une formule assez technique, conséquence d'une démonstration si formelle, à l'appui d'hypothèses si rigides, qu'on oublie le sens de cette analogie. Toutefois, en revenant à des considérations géométriques simples, nous constaterons qu'il s'agit juste de quadriller différemment une surface donnée, soit en la parcourant autrement, soit en la soumettant à des déformations dites équivalentes, qui conservent les aires.

Soit donc à calculer l'intégrale

$$\int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

selon la méthode, naguère au programme de Terminale [1] et toujours à celui des classes préparatoires [2], où l'intégrande f dépend de la variable x qui dépend à son tour d'une variable u . Ce dernier lien s'exprime théoriquement par la relation $x = \chi(u)$ où la fonction χ sera parée de toutes les qualités qui, au fil de l'eau, se révéleront utiles. En particulier, χ applique un certain segment $[\alpha, \beta]$ sur $[a, b]$ et s'y dérive à loisir. Par commodité, et malgré la confusion que cela créerait, on identifie volontiers χ à ses valeurs. Ainsi trouvera-t-on usuellement

$$x = \chi(u) = x(u). \quad (2)$$

Une première approche

À mesure que u balaye $[\alpha, \beta]$ au pas uniforme élémentaire du , x progresse au pas, adaptatif lui, $dx = \frac{dx}{du} du$. Cette subdivision découpe des lamelles quasi rectangulaires, contigües, de largeur infinitésimale $\frac{dx}{du} du$ et de hauteur $f(x(u))$. Leur cumul reforme l'aire désirée, si bien que

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(x(u)) \frac{dx}{du} du. \quad (3)$$

Il importe que a et b demeurent les extrémités du chemin que parcourt x – à savoir que $x(\alpha) = a$ et $x(\beta) = b$, ce qui implique la surjectivité de χ . Cependant, x pourrait aller et venir, voire déborder du segment $[a, b]$. L'orientation de l'axe des abscisses assure que les portions d'aires, algébriques et redondantes, parcourues dans un sens puis à revers, se compensent.

Une seconde approche

Voici une deuxième interprétation de la formule (3), valable à condition que la relation (2) soit réversible, c'est-à-dire que χ soit injective et donc bijective. La dépendance de u à x se note alors $u = \mu(x)$ ou, abusivement mais plus communément

$$u = \mu(x) = u(x). \quad (4)$$

Traçons conjointement $x \mapsto f(x)$ et $u \mapsto f(x(u))$. Avancer x de dx délimite une lamelle de hauteur $f(x)$ et de largeur infinitésimale dx , adossée à la première courbe. Sur l'autre en regard, lui correspond la bande de même hauteur $f(x(u))$ mais de largeur $\frac{du}{dx} dx$. Malléable, la première surface a été dilatée (ou contractée)

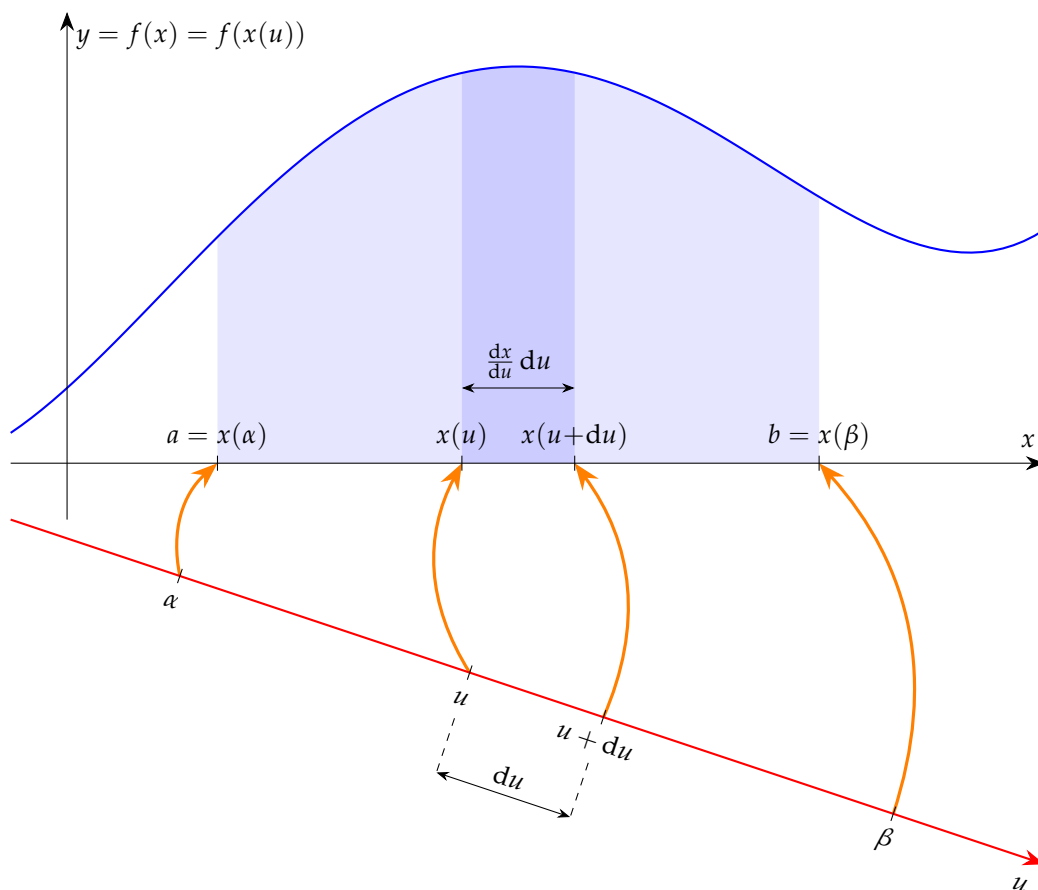


FIGURE 1 – Les secrets du changement de variable (formule directe, où u est « à la manœuvre ») : réglage des lamelles sous la courbe ($y = f(x) = f(x(u))$).

horizontalement du facteur $\frac{du}{dx}$. On en gomme l'effet sur l'aire en distordant la seconde verticalement du coefficient inverse. En opérant ainsi localement et tout du long, il vient

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(x(u)) \frac{1}{\frac{dx}{du}} du. \quad (5)$$

Les graphes de χ et de μ se déduisent l'un de l'autre d'une symétrie par rapport à la première bissectrice. En se réfléchissant les pentes s'inversent :

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{\frac{du}{dx}}$$

sous réserve de toutes les dérivabilités utiles. Le résultat du (5) est bien conforme à (3).

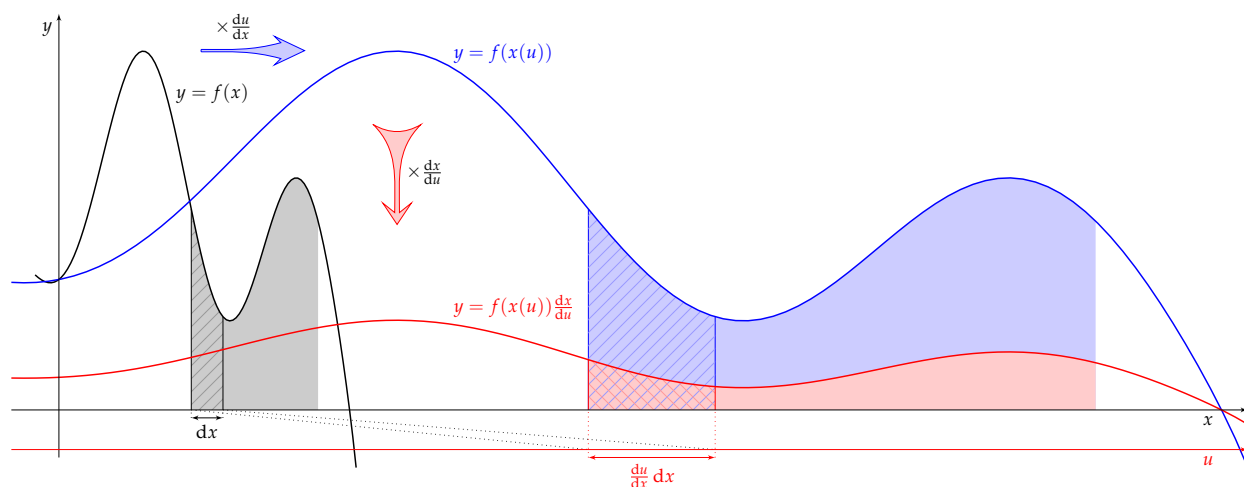


FIGURE 2 – Les secrets du changement de variable (formule réciproque, où x est « à la manœuvre ») : deux affinités, l'une horizontale, l'autre verticale, aux rapports inverses l'un de l'autre, préservent l'équivalence des aires sous les courbes $(y = f(x))$ et $(y = f(x(u)))$.

Références

- [1] « Programmes de mathématiques de Première et Terminale, séries A, B, C, D, E ». In : *Bulletin officiel spécial n°3 du 22 avril 1982* (1982).
- [2] « Programmes des CPGE voies ECG, ECT, PCSI, PTSI, MPSI, MP2I ». In : *Bulletin officiel spécial n°1 du 11 février 2021* (2021). URL : https://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?pid_bo=40147.