HAL open science

Le barbier était une femme

Séverine Verneyre, Karim Zayana

▶ **To cite this version:**

Séverine Verneyre, Karim Zayana. Le barbier était une femme. Tangente (Paris), 2022, 209. hal-03938220

HAL Id: hal-03938220

https://telecom-paris.hal.science/hal-03938220

Submitted on 13 Jan 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Le barbier était une femme

Séverine VERNEYRE[1] et Karim ZAYANA[1,2]

[1] Ministère de l'Éducation nationale, Paris
[2] LTCI, Télécom Paris, Institut Polytechnique de Paris

On dit du paradoxe du barbier qu'il permet de briller en société [1]. S'il poursuit un but didactique en illustrant l'un des résultats les plus fondamentaux de la théorie des ensembles, il risque cependant, sorti de son contexte, de se retourner contre vous. Aussi, après l'avoir remis en perspective – notamment de celle des programmes scolaires, tenterons-nous d'en dépasser le propos pour en discuter *et* l'image datée qu'il donne à voir de la société *et* la contradiction logique qu'il est censé porter.

C'est en classes de spécialité de première et de terminale [2, 3] que les lycéens formalisent les concepts de bijection et de cardinal. En comptant les parties d'un ensemble H à n éléments, $n \in \mathbb{N}$, et sachant que $2^n > n$, ils tiennent pour vain de mettre en bijection H et $\mathscr{P}(H)$. Autrement dit, ils concluent à ce que H et $\mathscr{P}(H)$ ne sont pas équipotents. Ce cap franchi, il est bienvenu d'aller un peu plus loin en prouvant le même résultat avec un ensemble H quelconque, éventuellement infini. L'intérêt est pluriel : découvrir le génie d'une démonstration aussi courte et simple qu'elle en est miraculeuse ; remonter les traces de Cantor [1] et de son siècle ; caresser une première fois l'échelle vertigineuse des infinis ; poser l'hypothèse du continu, dont les accents philosophiques existentiels bannissent toute «taille intermédiaire» à $\mathbb{N}$ et $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ [4].

1. Georg CANTOR, mathématicien allemand des XIXe et XXe siècles. On lui doit notamment un procédé diagonal lumineux pour établir la non dénombrabilité de $\mathbb{R}$, la construction d'un ensemble fractal, dit triadique, ou le théorème faisant l'objet de cet article.

Un raisonnement par l'absurde

Il est toujours possible d'injecter un ensemble H quelconque dans l'ensemble $\mathscr{P}(H)$ de ses parties, ne serait-ce qu'en associant à chaque élément $h \in H$ le singleton $\{h\}$. Par contre on ne trouvera jamais de surjection (et a fortiori de bijection) de H sur $\mathscr{P}(H)$. Pour établir ce théorème dont il a l'intuition et qu'il énonce, Cantor va d'abord le nier. Il considère donc une application f surjective de H sur $\mathscr{P}(H)$, à supposer qu'il le puisse. Puis il a cette idée, en apparence saugrenue mais en vérité lumineuse, d'envisager la partie $C \in \mathscr{P}(H)$ définie par

$$C = \{c \in H, c \notin f(c)\}.$$

Notons à ce stade que l'allure de C importe peu : *a priori*, C pourrait être l'ensemble H tout entier, une paire, un singleton, tout comme l'ensemble vide par exemple. Sans en préjuger, nous savons néanmoins que C admet un antécédent par f. Fixons-en un, noté b, et plaçons-le relativement à C. De deux choses l'une :

- $b \in C = f(b)$. Or par définition de C, $b \notin f(b) = C$;
- $b \notin C = f(b)$. Or cette même définition de C impose en miroir $b \in f(b) = C$.

Face à tant de contradictions l'application f ne peut qu'être chimérique, ce qui permet de statuer. Ainsi exposée, cette trame vient étoffer la variété de raisonnements par l'absurde qu'aura croisée l'élève au cours de sa scolarité. Elle complète avec bonheur d'autres cas d'école aussi fondamentaux qu'emblématiques : de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ étudiée au collège [5, 6] à l'unicité d'une limite vue en (bordure du programme de) spécialité de lycée [3] en passant par l'infinitude des nombres premiers démontrée en option mathématiques expertes de terminale [7].

Pour élégante qu'elle soit, la preuve de Cantor demeure abstraite. Il est de bon aloi de l'accompagner d'un dessin, sur lequel on aura marqué quelques éléments : c, c', c'', etc. composant C en tant qu'ensemble, et placé l'antécédent b de C par f d'après l'alternative qui lui est offerte, figure 1.

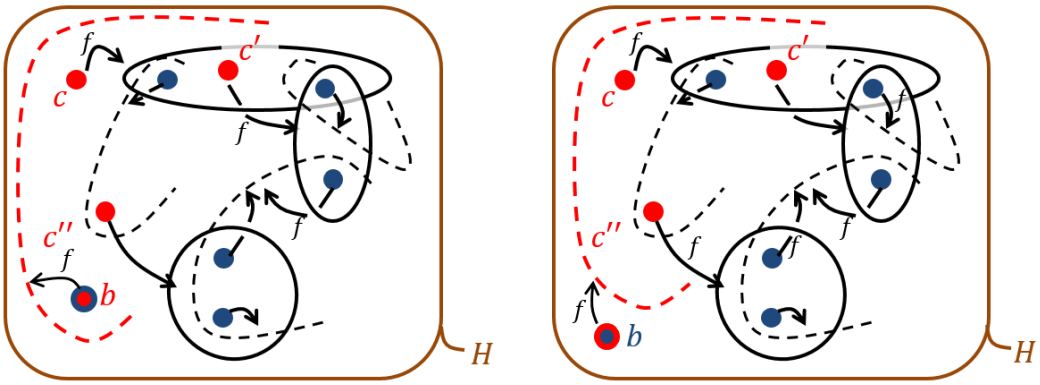

FIGURE 1 – Le raisonnement de Cantor. En rouge, les éléments qui n'appartiennent pas à leur image par f (et qui composent donc l'ensemble C), en bleu ceux qui y appartiennent (et qui composent le complémentaire $\overline{C}$). Quand l'antécédent b de C est dans C (schéma de gauche), il est à la fois rouge et bleu. Quand il n'est pas dans C (schéma de droite), il est à la fois bleu et rouge.

En plus de ne déboucher, par disjonction de cas, qu'à une aberration, le raisonnement de Cantor induit un cercle vicieux résumé sur le croquis en figure 2.

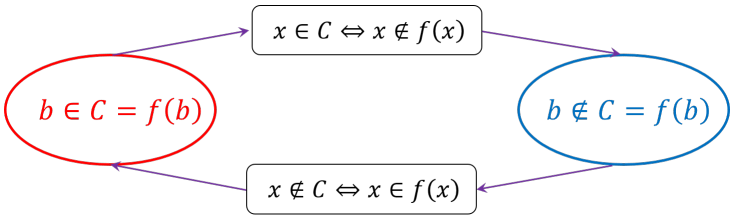

FIGURE 2 – Le raisonnement de Cantor, dans lequel chacune des deux propositions (à gauche et à droite) se nie, induit un cercle vicieux.

Du barbier à la coiffeuse

Mais que vient faire le barbier dans cette histoire ? Tombant un peu comme un poil sur cette soupe de Cantor, la métaphore – dite du barbier donc – donne un moyen mnémotechnique d'en retenir la recette. D'origine controversée, l'image fut reprise puis vulgarisée par Russell [2] [8] et ses contemporains. L'ensemble H y

2. Bertrand RUSSELL, mathématicien et philosophe gallois des XIXe et XXe siècles. Prix Nobel de littérature (1950).

représente les habitants d'une cité, mettons Séville en Espagne [9]. L'application f a pour fonction associée le verbe «raser». Elle envoie donc chaque habitant h de Séville vers le groupe d'individus sévillan qu'il rase. Rappelons-le, f est réputée surjective. Si bien que n'importe quel groupe d'individus possède en commun de se partager (au moins) un même barbier (extérieur ou non au groupe, mais membre de la cité). En particulier – c'est un postulat de départ du récit, conséquence de la surjectivité – n'importe quel habitant est présumé devoir être rasé, tandis que certains habitants pourraient ne raser personne – pour ceux-là, f associera le vide, $\varnothing$. *A priori*, il n'y a pas incompatibilité à ce qu'un habitant se rase lui-même et se fasse aussi raser par un autre à l'occasion. À une exception. L'ensemble C va réunir tous les habitants qui ne se rasent pas eux-mêmes ou, formulé différemment, qui sont de simples clients. Un antécédent de C est ce que nous nommerons un barbier professionnel b. La question

«Qui rase ce barbier ?»

manie l'antinomie :

- que ce barbier b se rase lui-même (soit $b \in f(b) = C$) et cela contrevient à sa fonction : ne raser que des gens qui ne se rasent pas eux-mêmes, à savoir de simples clients. Donc ce barbier ne se rase pas lui-même ;
- que ce barbier b ne se rase pas lui-même (soit $b \notin f(b) = C$) et, simple client, il doit être rasé par celui dont c'est le rôle : le barbier professionnel... donc il se rase lui-même !

Il y a bien de quoi tourner en bourrique. Alors comment échapper à l'implacable logique dans laquelle on nous a enfermé.e.s ? En y ré-introduisant de l'$h$umain ! Telle pourrait être la valeur de l'initiale h. Car pourquoi les $h$abitants ne seraient-ils que des $h$ommes, poilus qui plus est [10] ? Où sont les femmes [11] ? De celles qui rasent, qui se rasent ou qui ne se rasent pas [12, 13], figure 3 ? Ou si la morale de l'histoire ne disait-elle pas. . .que le barbier était une femme. . .que Russell ou ses contemporains étaient des hommes. . .
Mais alors, en retour à l'envoyeur. . .

«Qui coiffe la coiffeuse ?»

FIGURE 3 – De gauche à droite : 1) Le personnage de Maestro ne s'est jamais rasé ni fait raser 2) Une femme à barbe 3) Une femme qui se fait raser 4) Dans l'un des salons de Sarah Hamizi, la barbière de Paris...
Le paradoxe du barbier pris comme modèle du raisonnement de Cantor a ses limites. Et c'est heureux car, entre autres, l'histoire fait du rasage une obligation pour les hommes et ne considère pas que le barbier puisse être une femme. Quoi qu'il en soit, le résultat mathématique demeure, lui, inchangé : un ensemble ne peut pas être en bijection avec l'ensemble de ses parties.

Séverine VERNEYRE est professeure de mathématiques spéciales au lycée Champollion (Grenoble) et Karim ZAYANA est inspecteur général de l'éducation, du sport et de la recherche (groupe des mathématiques) et professeur invité à l'institut polytechnique de Paris (Palaiseau).

Remerciements

Les auteurs remercient Anne PÉRY, inspectrice d'académie – inspectrice pédagogique régionale de mathématiques dans l'académie de Paris, Michel POLIDORI, inspecteur de l'Éducation nationale de Mathématiques - Sciences dans l'académie de Corse, et Édouard THOMAS, secrétaire de rédaction du magazine Tangente pour leur relecture très fine et leurs suggestions d'amélioration du texte.

Références

[1] Tony CRILLY. *Juste assez de maths pour briller en société (50 mathematical ideas you really need to know)*. Dunod, 2008.

[2] « Programme d'enseignement de spécialité de mathématiques de la classe de première de la voie générale ». In : *Bulletin officiel spécial n°1 du 22 janvier 2019* (2019). URL : https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special1/MENE1901632A.htm.

[3] « Programme de l'enseignement de spécialité de mathématiques de la classe de terminale de la voie générale ». In : *Bulletin officiel spécial n°8 du 25 juillet 2019* (2019). URL : https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm.

[4] Bernard GOSTIAUX. *Cours de mathématiques spéciales : tome 1*. PUF, 1993.

[5] « Programmes du cycle 4 du collège ». In : *Bulletin officiel spécial n°31 du 30 juillet 2020* (2020). URL : https://eduscol.education.fr/document/621/download.

[6] Karim ZAYANA. « Une multitude irrationnelle ». In : *CultureMath* (2022). URL : https://culturemath.ens.fr/thematiques/concours-d-enseignement/une-multitude-irrationnelle.

[7] « Programme de l'enseignement optionnel de mathématiques expertes de la classe de terminale de la voie générale ». In : *Bulletin officiel spécial n°8 du 25 juillet 2019* (2019). URL : https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/82/5/spe264_annexe_1158825.pdf.

[8] Bertrand RUSSELL. *The Philosophy of Logical Atomism*. David Pears, 1918.

[9] Philippe-Augustin BEAUMARCHAIS et Gioachino ROSSINI. *Le barbier de Séville*. 1775-1816.

[10] Albert BARILLÉ et Michel LEGRAND. *Il était une fois...l'Homme*. Procidis - FR3, 1978.

[11] Patrick JUVET et Jean-Michel JARRE. *Où sont les femmes ?* Paris by Night. Barclay, 1977.

[12] Pénélope BAGIEU. *Culottées*. Gallimard, 2016.

[13] Charlie CHAPLIN. *The Great Dictator*. Charlie Chaplin Film Corporation, 1940.