Perles du second degré

Karim Zayana, Evrim Evci

▶ **To cite this version:**

Karim Zayana, Evrim Evci. Perles du second degré. 2022. hal-03880208

HAL Id: hal-03880208

https://telecom-paris.hal.science/hal-03880208

Submitted on 1 Dec 2022

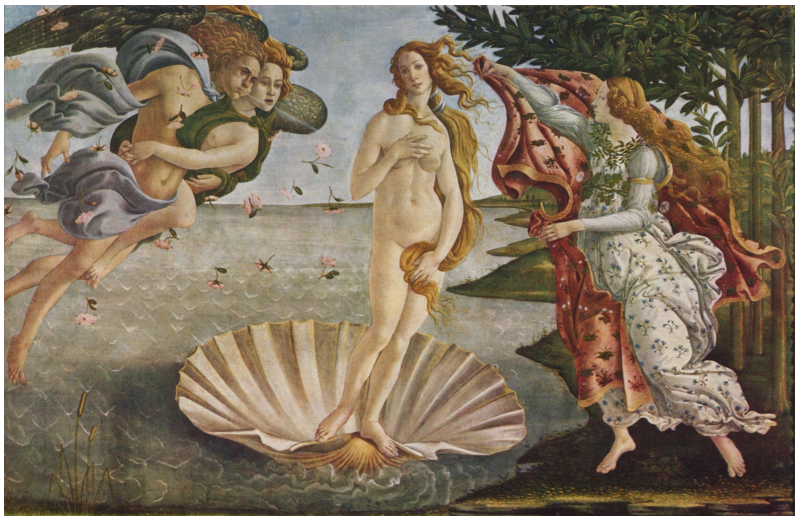
HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Perles du second degré

Karim ZAYANA[1,2] et Evrim EVCI[1,3]

[1] Ministère de l'Éducation nationale, Paris
[2] LTCI, Télécom Paris, Institut Polytechnique de Paris
[3] DMA, École normale supérieure, Paris



Les fonctions du second degré sont introduites en classe de seconde [1]. Leur étude se poursuit en classe de première [2, 3, 4] et vise plusieurs objectifs. Un premier est structurel, posant une première pierre à l'édifice de l'algèbre des polynômes et de ses équations. Un deuxième est scientifique, jetant des ponts vers la physique, la chimie ou encore la biologie. Un troisième est économique, touchant à l'optimisation. Un quatrième est culturel, invitant à voyager, à travers les âges, entre l'Orient à l'Occident. Un autre intérêt, pragmatique, voire philosophique, est de nous rappeler que parfois dans la vie, tout ne va pas tout droit. L'éventail des situations, très simples, sélectionnées ici en donne un aperçu, lequel pourra servir aux lycéens d'activités d'accueil, d'amorce ou d'approfondissement.

1) De la logique avant toute chose ⇌ structures et logique

Soit l'application f du second degré définie de $\mathbb{R}$ dans lui-même par

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b, c sont des réels, a non nul. A-t-on :
a) f est paire $\Leftrightarrow b = 0$?
b) L'image par f de tout entier relatif est un entier relatif $\Leftrightarrow$ les coefficients a, b, c sont des entiers relatifs ?
c) L'image par f de tout nombre rationnel est un nombre rationnel $\Leftrightarrow$ les coefficients a, b, c sont des nombres rationnels ?

a) L'implication ($\Leftarrow$) coule de source. Pour l'autre, soustraire $f(1)$ à $f(-1)$ filtre b puis conduit à $b = 0$.

b) L'implication ($\Leftarrow$) est vraie en vertu des opérations entre entiers. Sa réciproque est fausse. Il suffit de penser à

$$f(x) = \frac{1}{2}x(x+1).$$

Le produit de deux entiers consécutifs est en effet toujours un nombre pair puisque l'un des deux facteur l'est. Donc $f(n) \in \mathbb{Z}$ dès que $n \in \mathbb{Z}$.

c) L'implication ($\Leftarrow$) est vraie en vertu des opérations entre rationnels. Sa réciproque est vraie. Évaluer f en 0 impose $c \in \mathbb{Q}$. Additionner $f(1)$ à $f(-1)$ oblige alors à $a \in \mathbb{Q}$. Enfin soustraire $f(1)$ à $f(-1)$ donne $b \in \mathbb{Q}$.

Les compétences «raisonner» – «calculer» – «communiquer» ont ici toutes été sollicitées. Nous croiserons la compétence «modéliser» dès l'exercice suivant, et travaillerons abondamment la compétence «représenter» aux exercice 10 et 11.

2) Minimiser une puissance ⇌ sciences / économie

On découpe une ligne chauffante résistive en deux lignes, que l'on rebranche en parallèle sur la tension d'alimentation comme en figure 1. On rappelle que la puissance dissipée par une résistance R soumise à une tension U vaut $\frac{U^2}{R}$.

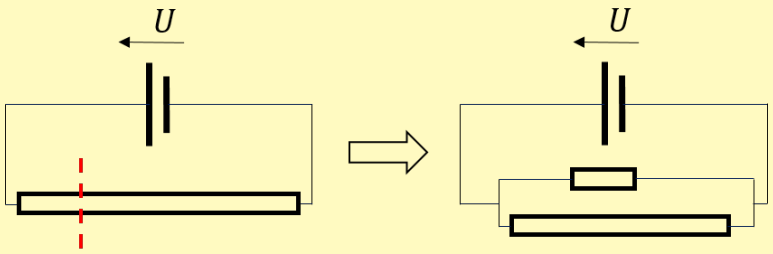


FIGURE 1 – Section d'une ligne résistive dont les deux bouts sont ensuite mis en parallèle.

Soit R la résistance de la ligne initiale. La somme des résistances des deux nouvelles lignes valant R, celle de la première vaut, mettons, $R/2 + x$ et celle de la seconde, $R/2 - x$ où $x \in [0, R/2[$. La puissance totale dissipée est égale à

$$\begin{aligned}\mathscr{P} &= \frac{U^2}{(R/2 + x)} + \frac{U^2}{(R/2 - x)} \\ &= \frac{4RU^2}{R^2 - 4x^2}.\end{aligned}$$

Cette puissance est minimale quand $x = 0$, donc quand la ligne résistive est découpée en son milieu.

3) Maximiser un chiffre d'affaires ⇌ économie

Un magazine local vendu $9,30$ euros l'unité tire à $2\ 400$ exemplaires. On estime que chaque augmentation de 10 centimes du prix au numéro fait perdre 20 acheteurs. Quel prix au numéro doit fixer le vendeur pour maximiser le total des ventes en euro ?

Notons x l'augmentation en dizaine de centimes d'euro. Le montant des ventes en euro, modulé par x, vaut

$$(2\ 400 - 20x)(9,3 + \frac{x}{10}),$$

dont la forme développée,

$$22\ 320 + 54x - 2x^2,$$

est maximale en $x = 13,5$ (et nulle notamment en $x = -93$, ce qui a le don de rassurer). Soit un prix au numéro de $10,65$ € pour un tirage de $2\,130$ unités et une vente totale de $22\,684$ € : tel est le meilleur compromis.

4) Partager un trésor ⇌ économie / philosophie

Un groupe d'amis trouve un trésor d'une valeur de 2 millions ; ils partagent équitablement. L'un d'eux déclare : « si nous avions été cinq de moins, j'aurais présentement empoché 20 000 de plus ». Combien sont-ils ?

Notons n le nombre d'amis. Les partages étant supposés toujours équitables, que le groupe soit complet ou diminué de 5 de ses membres, la déclaration de l'un d'entre eux une fois mise en équation s'écrit

$$\frac{2\,000\,000}{n} + 20\,000 = \frac{2\,000\,000}{n-5}.$$

En simplifiant,

$$\frac{100}{n} + 1 = \frac{100}{n-5}.$$

puis en mettant à dénominateur commun,

$$n^2 - 5n - 500 = 0.$$

Soit $n = -20$ (solution négative à rejeter) ou, en définitive, $n = 25$. Les amis sont au nombre de 25.

Dans la mesure où l'on recherchait ici une solution entière, un balayage méticuleux sur, mettons, les cent premiers entiers permettait aussi de conclure.

Question subsidiaire : tous calculs faits, le groupe pourra-t-il vraiment rester amis ? Toujours est-il que, désormais fortunés, l'exercice qui suit est fait pour eux.

5) My teacher is not rich ⇌ Vie courante / Géométrie

On dispose côte à côte horizontalement et verticalement deux cartes de crédit. Essayez vous aussi... les trois coins seront alignés comme en figure 2. En rapportant la largeur à l'unité, quel coefficient x les banquiers ont-ils donc pu choisir ?

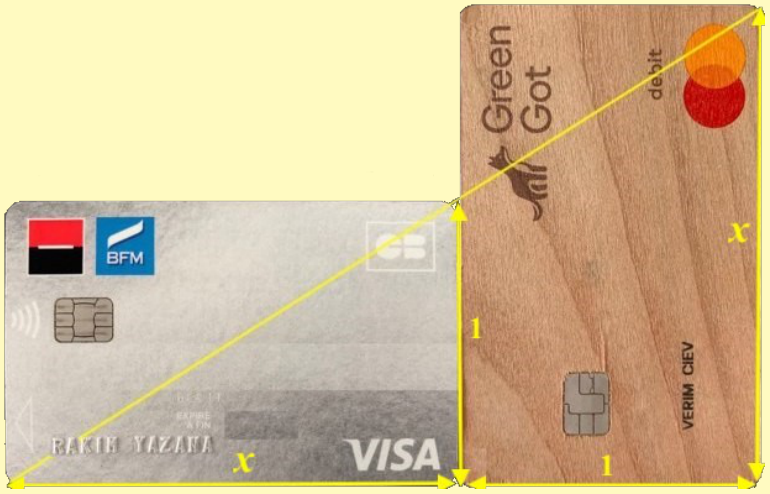


FIGURE 2 – Nos cartes ne sont ni bleues ni gold, mais dorées !

Les bords ad-hoc étant parallèles, le théorème de Thalès impose au tout d'être au grand côté ce que le grand côté est au petit, soit

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1},$$

étant entendu que, pour des questions matérielles, $x > 0$. Après mise à dénominateur commun, l'inconnue x vérifie donc l'équation de Fibonacci [1] (dite aussi « équation dorée »)

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Ceci fournit

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \text{ (le « nombre d'or ») ou } x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0.$$

Comme $x > 0$, $x = \varphi$. Les proportions d'une carte de crédit sont dorées. Est-ce une allusion aux lingots que les banques espéreraient voir dormir sur nos comptes ?

1. FIBONACCI, dit Léonard de Pise, vécut en Italie entre les XII^{e} et XIII^{e} siècles. Il demeure célèbre pour la suite associée à son nom, et pour le polynôme compagnon de sa suite, $X^2 - X - 1$.

6) Il n'y a pas de fonction « presque » exponentielle ⇌ culture

Déterminer les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant pour x et y réels

$$f(x+y) = f(x)f(y) - 1.$$

Les équations fonctionnelles ont connu leur heure de gloire dans les programmes de lycée, dont elles n'ont cependant pas totalement disparu, au titre d'approfondissement possible en terminale [5]. Bien sûr, elles inspirent encore les compétitions mathématiques, les Olympiades en tête. Nous sommes ici partis de l'une des plus emblématique d'entre elles, puis nous l'avons légèrement perturbée à l'aide d'une constante.

En fixant d'abord x et y à 0, on trouve $f(0) = f(0)^2 - 1$. Le réel $X = f(0)$ vérifie l'équation de Fibonacci

$$X^2 - X - 1 = 0.$$

D'où

$$f(0) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \text{ ou } X = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 - \varphi = -\frac{1}{\varphi}.$$

Puis en posant juste $y = 0$ il vient après factorisation

$$(f(0) - 1)f(x) = 1.$$

De deux choses l'une :

— lorsque $f(0) = \varphi$, $f(x)$ vaut invariablement $1/(\varphi - 1) = \varphi$;

— lorsque $f(0) = 1 - \varphi$, $f(x)$ vaut invariablement $1/(-\varphi) = 1 - \varphi$.

Bref, f est soit la fonction constante égale à φ, soit la fonction constante égale à $1 - \varphi$. Et ces deux solutions conviennent.

Plus généralement, on pourrait considérer l'équation fonctionnelle

$$f(x+y) = f(x)f(y) - \varepsilon$$

où $\varepsilon > 0$. De manière analogue, $f(0) = \alpha$ ou $f(0) = \beta$ avec $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha\beta = -\varepsilon$ (en particulier, ni α ni β ne sont nuls). Dans le premier cas, $(\alpha - 1)f(x) = -\alpha\beta$ donc $f(x) = \alpha$ après simplification, tandis que dans le second $f(x) = \beta$. Ces solutions ne passent pas à la limite quand $\varepsilon \to 0$. Elles tendent l'une vers 1 l'autre vers 0 quand l'équation fonctionnelle débouche sur des exponentielles (quitte à renforcer les hypothèses sur f, de continuité par exemple).

7) Une équation de Fermat d'exposant réel ⇌ culture

Résoudre l'équation d'inconnue l'exposant $x \in \mathbb{R}$

$$16^x + 20^x = 25^x \tag{1}$$

Factoriser 16, 20 et 25 mène à

$$4^{2x} + 4^x 5^x = 5^{2x}$$

puis, après avoir posé $X = \left(\frac{5}{4}\right)^x$, à l'équation de Fibonacci

$$X^2 - X - 1 = 0.$$

Ceci fournit

$$X = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \text{ ou } X = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 - \varphi.$$

Mais la positivité de X écarte la seconde option. Si bien que le problème n'admet qu'une solution,

$$x = \frac{\log(\varphi)}{\log(\frac{5}{4})} \simeq 2,156. \tag{2}$$

Que cette dernière ne soit pas entière était prévisible au regard du problème de Fermat, lequel exclut d'office $x = 3$, $x = 4$, $x = 5$, etc. Quant aux valeurs particulières $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, une rapide vérification prouve qu'elles ne conviennent pas.
Qu'il existe une solution intermédiaire à 2 et 3 était là aussi attendu, continuité des quantités en jeu oblige dans la mesure où $16^2 + 20^2 = 656$ est supérieur à $625 = 25^2$ et $16^3 + 20^3 = 12\,096$ est inférieur à $15\,626 = 25^3$.

8) L'urne équitable ⇌ philosophie

Une urne contient 6 boules rouges et x boules blanches, indiscernables au toucher, avec $x \geqslant 1$. On tire deux boules simultanément au hasard. Comment choisir x pour qu'il y ait 50 % de chances que ces deux boules soient de la même couleur ?

Tirer deux boules simultanément avec ses deux mains puis les regarder (en observant, par exemple, celle de gauche en premier) revient à les tirer successivement sans remise. Avec les notations *ad-hoc* – qui renvoient aux couleurs, et

à l'indexation *ad-hoc* – qui rappelle l'ordre du tirage, la situation nous mène à l'arbre de probabilités suivant :

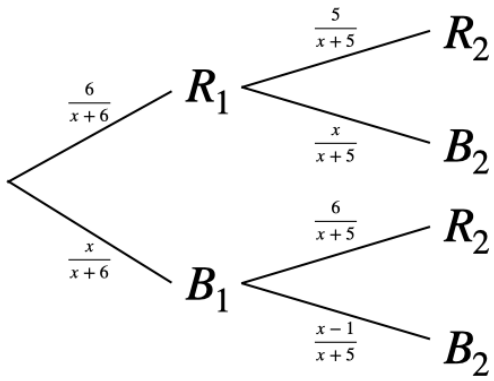


FIGURE 3 – Arbre de probabilités de l'exemple 8.

Le problème se traduit ainsi par l'égalité :

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) + \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{2}.$$

Or, en utilisant les probabilités conditionnelles [2] :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) &= \mathbb{P}(R_1)\,\mathbb{P}(R_2 \mid R_1) \\ &= \frac{6}{6+x} \times \frac{5}{5+x}\end{aligned}$$

et, de même,

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \frac{x}{6+x} \times \frac{x-1}{5+x}.$$

Aussi l'équation à résoudre devient-elle, après mise au même dénominateur,

$$x^2 - 13x + 30 = 0.$$

2. Rappelons à ce propos que la probabilité d'un événement A conditionnellement à l'événement B se note indifféremment $\mathbb{P}(A \mid B)$ ou $\mathbb{P}_B(A)$. La première écriture a l'avantage de suivre l'énonciation en français, la seconde de rappeler qu'une probabilité conditionnée demeure une probabilité.

Ainsi, $x = 3$ ou $x = 10$. Le jeu est équitable avec 3 boules blanches ou 10 boules blanches... mais non 6, valeur attendue quand on pratique les tirages *avec* remise.

9) Le problème de l'échelle unique ⇌ culture

Une malle cubique de 70 centimètres de côté est placée contre un mur. On pose, en équilibre sur son couvercle, une échelle de $2,5$ m en contact avec le sol d'un côté, adossée à la paroi de l'autre. Que peut valoir la hauteur d'appui h ?

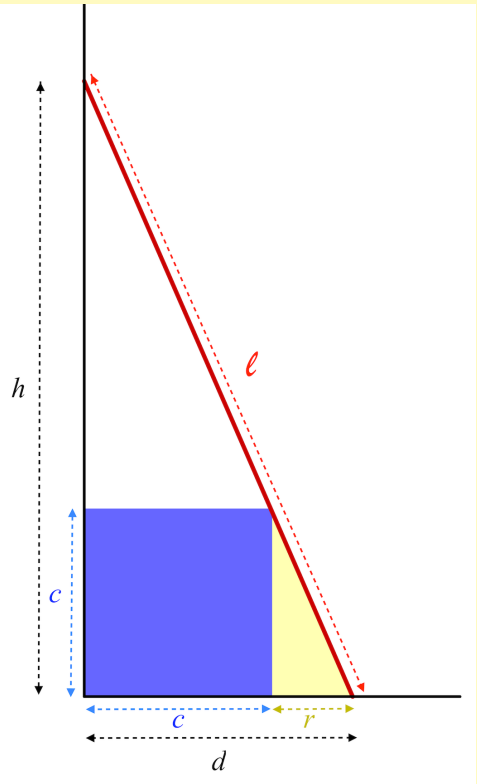


FIGURE 4 – Vue de profil de l'échelle, inclinée sur la malle. Il y a trois contacts : en une arête de la caisse, au sol, au mur.

Notons r (respectivement, d) le retrait des pieds de l'échelle à la caisse (resp.

au mur). Le triangle jaune pâle étant semblable au grand triangle rectangle d'hypoténuse l'échelle toute entière,

$$\frac{r}{d} = \frac{c}{h}.$$

Comme $c + r = d$, il vient alors

$$\frac{c}{d} + \frac{r}{d} = 1$$

puis

$$\frac{c}{d} + \frac{c}{h} = 1. \tag{3}$$

Le théorème de Pythagore fournit par ailleurs

$$d^2 + h^2 = \ell^2. \tag{4}$$

Après avoir élevé au carré (3) et combiné avec (4), on obtient

$$(dh)^2 - 2c^2 dh - \ell^2 c^2 = 0.$$

Les données numériques de l'énoncé, toutes converties en cm, conduisent à la seule valeur positive du produit de d par h, noté p dans la suite,

$$dh = 700(7 + \sqrt{674}) = p,$$

puis, connaissant la somme via (3)

$$d + h = \frac{dh}{c} = \frac{p}{c},$$

à deux solutions viables

$$h = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 19\,600p}}{140}.$$

Soit, approximativement, $h \simeq 229$ cm ou $h \simeq 101$ cm, qui correspondent à deux positions symétriques par rapport à la première bissectrice : l'une où l'échelle est pratiquement couchée, l'autre pratiquement debout. Cette énigme, très classique, admet des variantes, en particulier celle dite du « Two Ladders Problem ». [6, 7].

10) Usinage de cône ⇌ sciences

Quel est le plus grand cône de révolution qu'il est possible d'usiner dans une sphère et quel est alors le rapport de leurs volumes ?

Il s'agit donc d'usiner un cône à partir d'une pièce sphérique. Orientons l'axe de la figure 5 dans le sens de $[0, S)$. Le théorème de Pythagore dans le triangle $OO'A$ rectangle en O' fournit

$$r^2 = R^2 - x^2.$$

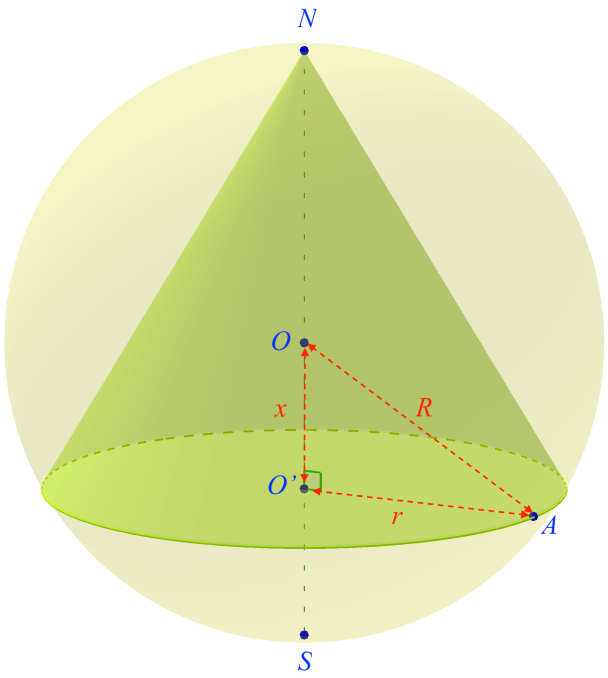


FIGURE 5 – Cône inscrit dans une sphère. Le point A est situé sur la sphère, ainsi que les points N (comme « Nord ») et S (comme « Sud »).

Le volume $\mathscr{V}$ du cône est donc, pour x dans $I = [-R\,;\,R\,]$,

$$\mathscr{V}_C(x) = \frac{1}{3}\pi r^2 \times O'N = \frac{1}{3}\pi\,(R^2 - x^2)(R + x).$$

La dérivation de ce polynôme nous amène alors, pour tout réel x de I, à

$$\mathscr{V}'_C(x) = -\frac{1}{3}\pi\,(3\,x^2 + 2\,Rx - R^2)$$

dont une racine évidente est $-R$, en périphérie de notre intervalle d'étude. La seconde racine est $\frac{1}{3}R$, en laquelle le volume $\mathscr{V}_C$ atteint son maximum valant :

$$\mathscr{V}_C\left(\frac{1}{3}R\right) = \frac{1}{3}\pi\,\left[R^2 - \left(\frac{R}{3}\right)^2\right]\left[R + \frac{R}{3}\right] = \frac{32}{81}\,\pi\,R^3.$$

Le rapport des volumes est alors :

$$\frac{\frac{32}{81}\,\pi\,R^3}{\frac{4}{3}\,\pi\,R^3} = \frac{32}{81} \times \frac{3}{4} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

11) Un flacon de parfum optimal ⇌ économie

Un petit flacon de parfum, d'une contenance de 25 ml, a la forme d'un coin de pavé droit supporté par deux rails rectangulaires fixés sous la base OAB, figure 6 ci-après. Les faces OAC, OBC et OAB sont peintes, à l'extérieur uniquement, d'une laque coûtant très cher, tandis que la face ABC reste transparente. Les rails, de hauteur $e = 2{,}5\,\text{mm}$, sont, eux, laqués sur les deux faces et considérés d'épaisseur négligeable. Donner les dimensions du flacon qui coûte le moins cher en peinture.

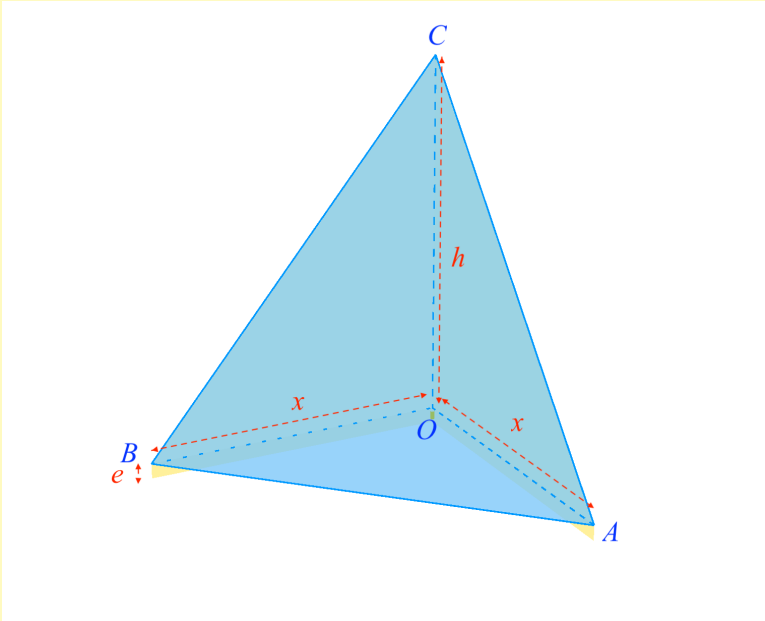


FIGURE 6 – Vue du flacon en perspective. De forme tétraédrique (coin de pavé droit), il est supporté par deux rails rectangulaires.

Le volume du tétraèdre est, d'après les notations de la figure cotée,

$$\mathscr{V}_T = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\, x^2 \times h.$$

Adoptons pour unité le cm : 25 ml $= 25\ \text{cm}^3$. D'où, pour x réel strictement

positif et exprimé en cm, la relation :

$$h = \frac{6\,\mathscr{V}_T}{x^2} = \frac{150}{x^2}.$$

La surface peinte, composée des trois triangles sur l'extérieur et des deux rails sur leurs deux faces, est alors

$$\mathscr{S} = 2\left(\frac{1}{2}\,xh\right) + \frac{1}{2}\,x^2 + 2 \times 2\,ex.$$

En substituant l'expression de h, on obtient

$$\mathscr{S}(x) = x \times \frac{150}{x^2} + \frac{1}{2}\,x^2 + x = \frac{1}{2}\,x^2 + x + \frac{150}{x}.$$

La fonction $\mathscr{S}$ se dérive en

$$\mathscr{S}'(x) = x + 1 - \frac{150}{x^2} = \frac{x^3 + x^2 - 150}{x^2}.$$

Elle est donc du signe de son numérateur, polynôme de degré 3 admettant 5 comme racine évidente, ce qui donne

$$\mathscr{S}'(x) = \frac{(x-5)(x^2+6x+30)}{x^2}.$$

Le trinôme du second degré obtenu par factorisation est de signe constant, ici strictement positif : soit qu'on remarque que chacun de ses termes l'est soit qu'on en calcule le discriminant (strictement négatif).

En conclusion, la surface peinte est minimale pour $x = 5$ (cm) et par conséquent $h = 6$ (cm).

12) Une propriété de Tchébychev ⇌ optimisation et logique

On souhaite ici prouver que pour toute application P du second degré définie du segment $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ par

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b, c sont des réels, a non nul, on a

$$\max |P(x)| \geqslant \frac{|a|}{2}.$$

a) Vérifier ce résultat pour la fonction polynôme T (dite de Tchébychev) définie sur $[-1,1]$ par

$$T(x) = 2x^2 - 1.$$

b) On revient au cas général. Conclure en procédant par l'absurde après avoir envisagé la fonction auxiliaire $\Delta = P - \frac{a}{2}T$.

a) Une étude de la fonction T de Tchébychev[3] mène au résultat. Mais il est plus judicieux d'examiner $T(\cos(x))$, qui balaye toutes les valeurs atteintes par T sur $[-1,1]$. L'expression se simplifie en $cos(2x)$, et culmine en valeur absolue à $1 = \frac{|a|}{2}$.

b) Raisonnons par l'absurde. Supposons la fonction P strictement bornée par $\frac{|a|}{2}$ sur le segment $[-1,1]$. Dès lors, les signes de Δ alternent en -1, 0 et 1. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, Δ s'annulerait sur $]-1,0[$ et de nouveau sur $]1,0[$. Or Δ se simplifie en $\Delta(x) = bx + c$. Affine, la fonction Δ doit être identiquement nulle sur $[-1,1]$. Il y a contradiction puisque, par exemple, $\Delta(-1) \neq 0$.

3. Pafnouti TCHÉBYCHEV est un mathématicien russe qui vécut au XIX^e siècle. On lui doit des avancées considérables en théorie des nombres et en probabilités, ainsi que plusieurs inégalités dont celle étudiée ici (et qui est généralisable à toute une catégorie de polynômes).

13) Population de bactéries et processus de Galton-Watson ⇌ sciences

Une colonie de bactéries est mise en culture à partir d'une bactérie souche [a]. Chaque heure, cette dernière, tout comme chacune de ses descendantes éventuelles, meurt avec la probabilité $1-p=2/3$ ou bien se divise avec la probabilité $p=1/3$ comme en figure 7. Le cas échéant, chacune des deux branches vit sa vie en toute indépendance. Démontrer que la population totale finit, en toute probabilité, par s'éteindre.

a. La souche est généralement constituée de plusieurs bactéries. Nous la réduisons à une seule pour simplifier le modèle.

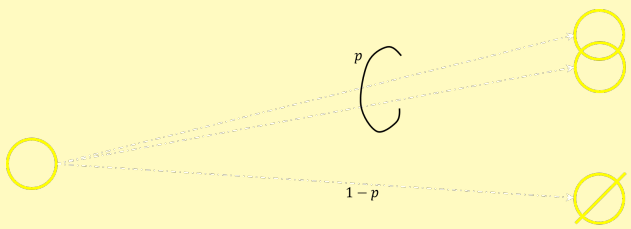


FIGURE 7 – Vie ou mort d'une bactérie. Avec la probabilité $p=1/3$, elle se dédouble (et se métamorphose donc en deux nouveaux êtres vivants). Avec la probabilité $1-p=2/3$, elle meurt avant.

Notons E l'événement : « la colonie finit par s'éteindre », à savoir qu'elle disparaît en un temps fini – ce que nous voulons établir avec la probabilité unité (presque sûrement, donc). Pour ce faire, discutons selon la réalité de la première division cellulaire. Celle-ci nous permettra de conditionner nos calculs. Ainsi, soit la « bactérie souche [4] meurt avant de se dédoubler » (ø) [5], soit « elle se dédouble » (ø) [6]. Si bien que

$$\mathbb{P}(E)=\mathbb{P}(E\mid \text{ø})\mathbb{P}(\text{ø})+\mathbb{P}(E\mid \text{ø})\mathbb{P}(\text{ø}).$$

4. La souche est généralement constituée de plusieurs bactéries. Nous la réduisons à une seule pour simplifier le modèle.

5. On désigne ainsi cet événement, qu'on ne confondra pas avec le vide en dépit de la notation choisie.

6. On désigne ainsi cet événement, qu'on ne confondra pas avec l'infini en dépit de la notation choisie.

Quand d'entrée la bactérie souche meurt, la colonie disparaît :

$$\mathbb{P}(E \mid \text{ø}) = 1.$$

Quand la bactérie souche se dédouble, envisager $\mathbb{P}(E \mid \text{ø})$ revient à envisager deux lignées parallèles nous ramenant chacune, à une translation du temps près, au comportement de la colonie d'origine. Les deux lignées doivent s'éteindre, ce qu'on code par les événements E_1 et E_2 dont le conditionnement par l'événement ø est implicite. Ainsi,

$$\mathbb{P}(E \mid \text{ø}) = \mathbb{P}(E_1 \cap E_2),$$

l'indépendance des lignées entraînant

$$\mathbb{P}(E \mid \text{ø}) = \mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(E_2),$$

et l'invariance des comportements

$$\mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(E_2) = \mathbb{P}(E)^2.$$

D'où l'équation,

$$\mathbb{P}(E) = \frac{2}{3} + \frac{\mathbb{P}(E)^2}{3},$$

qui n'offre que deux possibles : $\mathbb{P}(E) = 2$, évidemment proscrite en termes de probabilité car supérieure à 1, et $\mathbb{P}(E) = 1$.

On peut se demander ce qu'il advient quand on change la probabilité p. Plus généralement, il s'agissait là d'un processus dit de branchement de Galton [7]-Watson [8], appartenant lui-même à la grande catégorie des chaînes de Markov [9].

Karim ZAYANA est inspecteur général de l'éducation, du sport et de la recherche (groupe des mathématiques) et professeur invité à l'institut polytechnique de Paris (Palaiseau), Evrim EVCI est professeur aux Collège & Lycée Saint-Barthélémy (Nice) et assistant éditorial du site expert ENS-DGESCO Culture-Math.

7. Francis GALTON est un homme de sciences et explorateur britannique qui vécut aux XIX^{e} et XX^{e} siècles. En mathématiques, et plus particulièrement en statistiques et probabilités, il est connu des étudiants pour son test et des lycéens pour sa planche [5].

8. Henry William WATSON est un mathématicien et physicien britannique qui vécut aux XIX^{e} et XX^{e} siècles.

9. Andreï Andreïevitch MARKOV est un mathématicien russe qui vécut aux XIX^{e} et XX^{e} siècles. Il est renommé pour sa théorie des processus stochastiques.

Remerciements

Les auteurs remercient Anne PÉRY, inspectrice d'académie – inspectrice pédagogique régionale de mathématiques dans l'académie de Paris et Lucienne SÉGA, inspectrice d'académie – inspectrice pédagogique régionale de mathématiques dans l'académie de Guadeloupe pour leur relecture très fine du texte.

Références

[1] « Programme d'enseignement de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique ». In : *Bulletin officiel spécial n°1 du 22 janvier 2019* (2019). URL : https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special1/MENE1901631A.htm.

[2] « Programme d'enseignement de spécialité de mathématiques de la classe de première de la voie générale ». In : *Bulletin officiel spécial n°1 du 22 janvier 2019* (2019). URL : https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special1/MENE1901632A.htm.

[3] Karim ZAYANA. « Somme et produit, couple star ». In : *CultureMath* (2022). URL : https://culturemath.ens.fr/thematiques/concours-d-enseignement/somme-et-produit-couple-star.

[4] Karim ZAYANA, Ivan BOYER et Pierre-Jean HOMIÈRE. « Par(ab)oles Par(ab)oles ». In : *CultureMath* (2022). URL : https://culturemath.ens.fr/thematiques/paraboles-paraboles.

[5] « Programme de l'enseignement de spécialité de mathématiques de la classe de terminale de la voie générale ». In : *Bulletin officiel spécial n°8 du 25 juillet 2019* (2019). URL : https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm.

[6] Martin GARDNER. *Mathematical Circus*. Mathematical association of America, 1996.

[7] Karim ZAYANA et Lucie JACQUET-MALO. « Thalès-Pythagore : Travaux Pratiques ». In : *CultureMath* (2021). URL : https://culturemath.ens.fr/thematiques/concours-d-enseignement/tp.