



Somme et produit, couple star

Karim Zayana, Victor Rabiet

► To cite this version:

| Karim Zayana, Victor Rabiet. Somme et produit, couple star. 2022. hal-03545055

HAL Id: hal-03545055

<https://telecom-paris.hal.science/hal-03545055>

Submitted on 27 Jan 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Somme et produit, couple star

Karim ZAYANA^{1,2} et Victor RABIET^{1,3}

¹ Ministère de l'Éducation nationale, Paris

² LTCL, Télécom Paris, Institut Polytechnique de Paris

³ DMA, École normale supérieure, Paris



En classe de première et à titre d'approfondissement [2], on a coutume de traiter par le second degré le système à deux inconnues x et y dont la somme Σ et le produit Π sont donnés. Soit :

$$\begin{cases} x + y = \Sigma \\ xy = \Pi \end{cases} \quad (1)$$

Quand Π est non nul¹, on remonte ainsi (1) en substituant $\frac{\Pi}{x}$ à y . Ceci mène à l'équation en X satisfaite par x (mais aussi par y) :

$$X^2 - \Sigma X + \Pi = 0. \quad (2)$$

Puis on résout habituellement en passant par le discriminant $\Delta = \Sigma^2 - 4\Pi$.

Il est aussi possible, et fructueux, d'adopter une autre logique. Si la somme Σ de x et de y est connue, leur moyenne $\frac{\Sigma}{2}$ l'est aussi et se trouve en leur milieu. Dès lors est-il naturel d'écrire

$$x = \frac{\Sigma}{2} - u \text{ et } y = \frac{\Sigma}{2} + u \quad (3)$$

1. Ceci assure la non nullité de x et de y .

où u désigne une variable auxiliaire. Si bien que

$$xy = \left(\frac{\Sigma}{2}\right)^2 - u^2 = \frac{\Sigma^2}{4} - u^2 = \Pi \quad (4)$$

et donc

$$u^2 = \frac{1}{4}(\Sigma^2 - 4\Pi) = \frac{\Delta}{4}, \quad (5)$$

qui renoue avec la traditionnelle discussion sur le signe de Δ , d'où les valeurs potentielles de u , et consécutivement du couple (x, y) .

Cette méthode ne requiert aucune connaissance préalable et tiendrait du miracle sans son interprétation géométrique. Sous réserve que x et y soient positifs, identifions-les aux côtés d'un rectangle, figure 1. Ainsi, $x + y = \Sigma$ mesure un demi-périmètre et $xy = \Pi$, une aire.

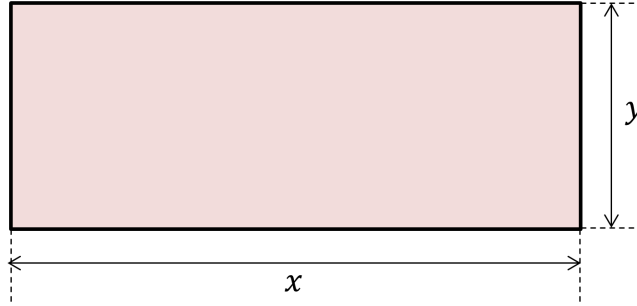


FIGURE 1 – Un rectangle de côtés x et y , avec ici $x \geq y (\geq 0)$.

Tout d'abord, la relation (4) entre Σ , Π et u prend tout son sens, comme l'illustre la figure 2.

Puis on anticipe l'impasse à laquelle peut conduire l'équation (5). Car on devine qu'à périmètre fixé, l'aire sera matériellement contrainte. Donc qu'au delà d'une certaine borne, la valeur de Π ne sera plus conciliable avec celle de Σ . De fait, assez grossièrement,

$$x + y = \Sigma \Rightarrow x, y \leq \Sigma \Rightarrow xy = \Pi \leq \Sigma^2,$$

et plus précisément, à l'aide de (4),

$$x + y = \Sigma \Rightarrow xy = \Pi \leq \frac{\Sigma^2}{4}.$$

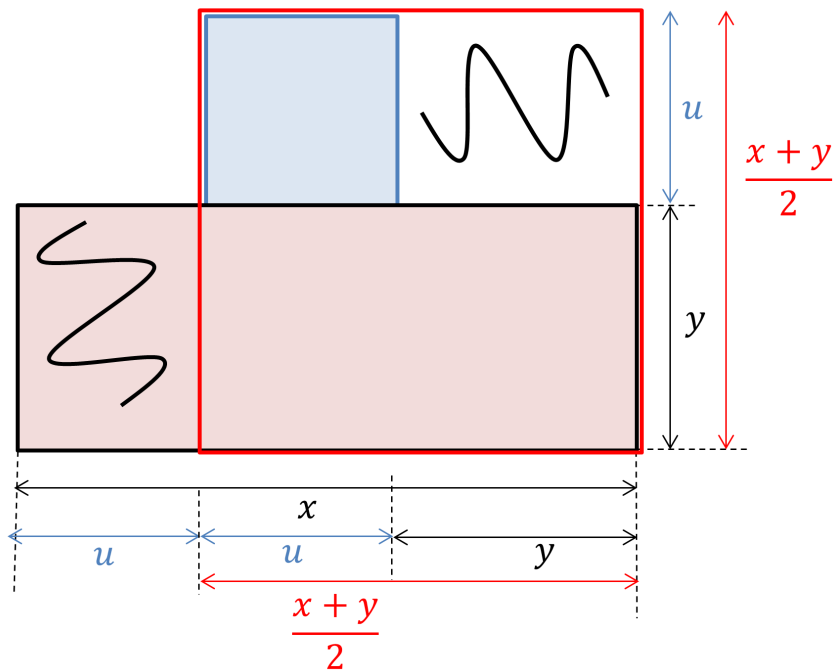


FIGURE 2 – Le grand carré rouge se décompose en un petit carré bleu et deux petits rectangles. En ré-agençant les deux petits rectangles, on reconstitue le grand rectangle mauve. En passant aux aires, on retrouve : $(\frac{x+y}{2})^2 = u^2 + xy$, soit $\frac{\Sigma^2}{4} = u^2 + \Pi$.

À l'inverse, on ne s'attend pas à ce qu'une aire fixée limite le périmètre : écraser le rectangle tout en l'étirant ouvre le jeu.

Enfin, on comprend qu'à périmètre fixé le carré réalise, parmi les rectangles, la plus grande aire et que de manière duale, à aire fixée, le même carré réalise le plus petit périmètre. Le fait est, toujours via (4),

$$x + y = \Sigma \Rightarrow xy \leq \frac{\Sigma^2}{4}$$

avec égalité si, et seulement si, $u = 0$. Et

$$xy = \Pi \Rightarrow \frac{\Sigma^2}{4} \geq \Pi \Rightarrow \Sigma \geq 2\sqrt{\Pi}$$

avec égalité si, et seulement si, $u = 0$.

Résumons :

$\Pi.\Sigma$. I love you [1].

Karim ZAYANA est inspecteur général de l'éducation, du sport et de la recherche (groupe des mathématiques) et professeur invité à l'institut polytechnique de Paris (Palaiseau), et Victor RABIET est responsable éditorial du site expert ENS-DGESCO CultureMath.

Remerciements

Les auteurs remercient Sandrine PICARD, inspectrice d'académie – inspectrice pédagogique régionale de mathématiques dans l'académie de Grenoble pour sa relecture très attentive et ses suggestions d'amélioration du texte.

Références

- [1] The BEATLES. « P.S. I love you ». In : *Please Please me* (1963).
- [2] « Programme d'enseignement de spécialité de mathématiques de la classe de Première de la voie générale ». In : *Bulletin officiel spécial n°1 du 22 janvier 2019* (2019). URL : <https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special1/MENE1901632A.htm>.