



HAL
open science

Chewing-games

Victor Rabiet, Karim Zayana, Ivan Boyer

► **To cite this version:**

| Victor Rabiet, Karim Zayana, Ivan Boyer. Chewing-games. 2021. hal-03372224

HAL Id: hal-03372224

<https://telecom-paris.hal.science/hal-03372224>

Submitted on 10 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Chewing-games

Victor RABIET^{1,3}, Karim ZAYANA^{1,2} et Ivan BOYER¹

¹ Ministère de l'Éducation nationale, Paris

² LTCI, Télécom Paris, Institut Polytechnique de Paris

³ DMA, École normale supérieure, Paris



Tire sur l'élastique, la mathématique cherra.

D'aucun verra dans l'allongement ou la contraction d'un chewing-gum des taux d'évolution, directs ou réciproques. Par exemple, +16 % dans un sens ou -6,25 % dans l'autre.

D'aucun jouera les experts en stéganographie, en inscrivant un message privé sur un strap bien tendu, puis en le relâchant : devenu secret le texte se cache dans les plis !

D'aucun déduira l'aire¹ de l'ellipse de demi-axes a et b , πab , de celle du disque de rayon a , πa^2 , d'une simple affinité.

Mais il y a plus sérieux, comme le montreront les deux exemples ci-après abordables en classes de spécialité Mathématiques au lycée [6, 7] .

1 De la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R}

Nous allons établir expérimentalement le résultat ci-après.

1. Cela ne fonctionne pas avec les périmètres. Au fait, pourquoi ?

\mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} .

Entre deux réels distincts il s'intercale toujours un rationnel.

Soient deux réels a et b distincts, par exemple positifs. Que leur écart dépasse l'unité, et un entier (donc un rationnel !) s'immisce entre les deux. Sinon... sortons-nous d'affaire grâce à un élastique, figure 1. Identifions-le au demi-axe réel positif ; marquons dessus a et b ; maintenons son extrémité gauche en 0 et tirons-le par la droite. Ainsi, étendons-le d'un facteur entier q suffisant pour que l'intervalle entre les deux nouvelles marques, désormais qa et qb , dépasse l'unité et capture donc un certain entier p . Relâchons l'élastique ; toutes les distances sont alors divisées par q : en regagnant leur place, les marques a et b ensèrent maintenant le rationnel $\frac{p}{q}$. Voilà la conclusion d'une méthode librement inspirée par une axiomatique qu'avait déjà posée, en son temps, Archimède² [2] !

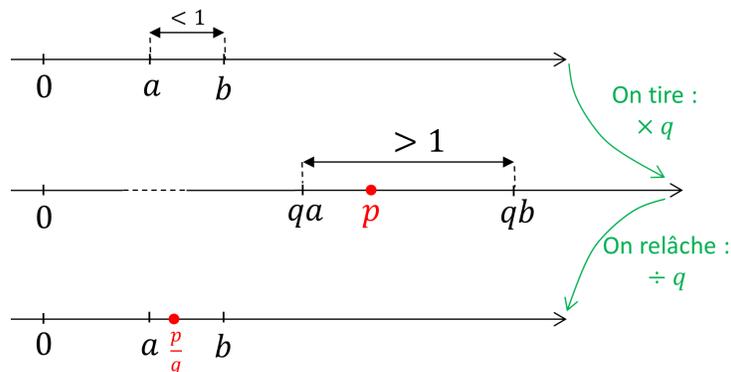


FIGURE 1 – Comment démontrer la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} avec un élastique.

2 De l'égalité $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

Tous les chemins mènent aux logarithmes.

On peut d'abord construire l'exponentielle, avant de l'inverser – c'est la ligne désormais suivie par les programmes scolaires [6, 7]. Ou s'en remettre au calcul d'aires (sans même parler de calcul intégral !) – dans la continuité des grands problèmes de quadrature [5].

2. ARCHIMÈDE, savant grec ayant vécu au III^e siècle avant J.-C.

La vérité historique est sans doute plus complexe [1, 5]. Mais ces deux méthodes ont l'avantage de la concision. Et la seconde éclaire une propriété fort utile des logarithmes : transformer des produits en sommes. Pour la comprendre, nul besoin de technique. Nous travaillerons juste les fonctions comme une pâte à modeler [3, 4]. Il nous faudra seulement convenir, du reste aisément, du principe géométrique ci-dessous, déjà esquissé au collègue [8] et que nous tiendrons pour acquis.

Plasticité des aires.

Étirer (ou contracter) une surface plane dans une direction relativement à une autre (souvent, mais pas toujours orthogonale) d'un facteur k , $k > 0$, multiplie son aire par le même facteur k . En doublant l'opération, dans une direction puis l'autre, on retrouve en particulier l'effet multiplicateur par le coefficient k^2 d'une homothétie sur les aires.

Notons $f_b : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur le domaine $[1; b]$. Son graphe découpe un morceau d'hyperbole équilatère. Étirons (ou contractons)-le horizontalement, au point d'ajuster les abscisses de ses extrémités à a et ab . Ceci déforme f_b en $f_b(\frac{\bullet}{a}) : x \mapsto f(\frac{x}{a})$. L'aire sous la courbe, initialement égale à $\ln(b)$, en est multipliée par a ; effet neutralisé quand on comprime (ou dilate) le tout verticalement du facteur $\frac{1}{a}$, figure 2.

Ainsi, l'aire que délimite $\frac{1}{a}f_b(\frac{\bullet}{a}) : x \mapsto \frac{1}{a}f(\frac{x}{a})$ de a à ab vaut-elle toujours $\ln(b)$. Mais $\frac{1}{a}f(\frac{x}{a})$ retombe sur $\frac{1}{x}$. Mis bout-à-bout, les arcs f_a et $\frac{1}{a}f_b(\frac{\bullet}{a})$ recouvrent l'hyperbole sur le segment $[1; ab]$. En passant aux aires, on conclut à

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

Suprêmes logarithmes, qui nous livrent cette formule « mirifique » aux dires mêmes de Néper³!

Remerciements

Les auteurs remercient vivement Aliénor DEFAUX, inspectrice d'académie – inspectrice pédagogique régionale de mathématiques dans l'académie d'Orléans - Tours pour sa relecture très attentive du texte.

3. John NAPIER, 1550 – 1617, savant écossais.

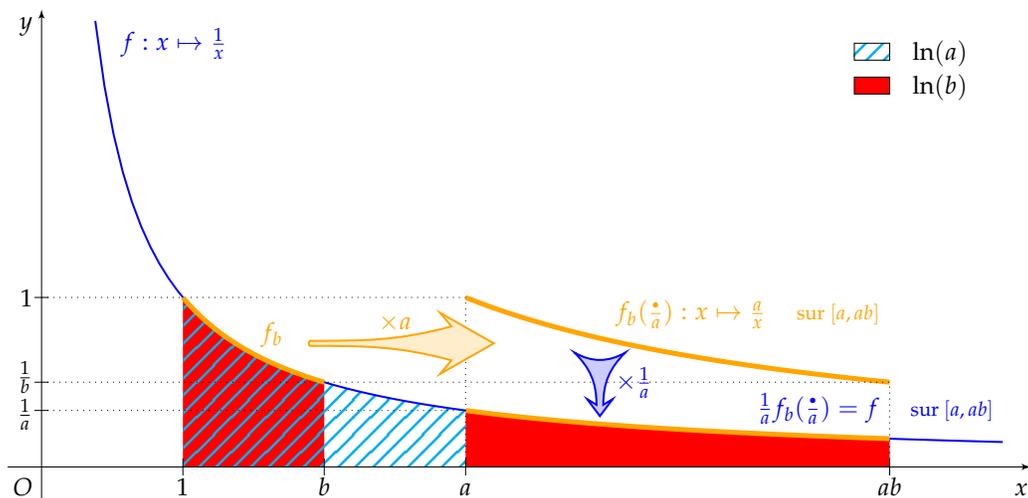


FIGURE 2 – Le pourquoi de l'identité $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Références

- [1] Nicolas BOURBAKI. *Éléments d'histoire des mathématiques*. Hermann, 1974.
- [2] Alain BOUVIER, Michel GEORGE et François LE LIONNAIS. *Dictionnaire des mathématiques*. PUF, 2005.
- [3] John CONWAY et Richard GUY. *The book of numbers*. Springer – Verlag, 1996.
- [4] Ernst HAIRER et Gerhard WANNER. *L'analyse au fil de l'histoire*. Springer Science & Business Media, 2001.
- [5] *Histoire des logarithmes*. Ellipses – I.R.E.M, 2006.
- [6] « Programme d'enseignement de spécialité de mathématiques de la classe de Première de la voie générale ». In : *Bulletin officiel spécial n°1 du 22 janvier 2019* (2019). URL : <https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special1/MENE1901632A.htm>.
- [7] « Programme de l'enseignement de spécialité de mathématiques de la classe de Terminale de la voie générale ». In : *Bulletin officiel spécial n°8 du 25 juillet 2019* (2019). URL : <https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm>.

- [8] « Programmes du cycle 4 du collège ». In : *Bulletin officiel spécial n°31 du 30 juillet 2020* (2020). URL : <https://eduscol.education.fr/90/j-enseigne-au-cycle-4>.