



Changer d'aire

Karim Zayana, Ivan Boyer, Victor Rabiet

► To cite this version:

| Karim Zayana, Ivan Boyer, Victor Rabiet. Changer d'aire. 2021. hal-03334582

HAL Id: hal-03334582

<https://telecom-paris.hal.science/hal-03334582>

Submitted on 4 Sep 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Changer d'aire

Karim ZAYANA^{1,2}, Ivan BOYER¹ et Victor RABIET^{1,3}

¹ Ministère de l'Éducation nationale, Paris

² LTCI, Télécom Paris, Institut Polytechnique de Paris

³ DMA, École normale supérieure, Paris



Ce qui fonctionnait avec une variable [1] reste efficace pour deux, à une nuance près comme nous allons le constater. Soit donc à calculer l'intégrale double

$$\iint_D f(x,y) dx dy \quad (1)$$

où l'intégrande f dépend du couple (x,y) qui dépend à son tour d'un couple (u,v) . Ce dernier lien s'exprime théoriquement par la relation $(x,y) = \Phi(u,v)$ où la fonction Φ sera parée de toutes les qualités qui, au fil de l'eau, se révéleront utiles. En particulier, Φ applique un certain domaine Δ sur le domaine D et s'y différentie à loisir. Par commodité, et malgré la confusion que cela créerait, on identifie volontiers Φ à ses valeurs. Ainsi trouvera-t-on usuellement

$$(x,y) = \Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v)). \quad (2)$$

À mesure que (u,v) balaye Δ au pas rectangulaire infinitésimal $du dv$, (x,y) progresse en pavant D de dalles élémentaires aux extrémités repérées par
— $(x(u,v), y(u,v))$;

$$\begin{aligned}
&— (x(u+du, v), y(u+du, v)) \simeq (x(u, v), y(u, v)) + \underbrace{\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}\right)}_{\frac{\partial \Phi}{\partial u}} du; \\
&— (x(u, v+dv), y(u, v+dv)) \simeq (x(u, v), y(u, v)) + \underbrace{\left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}\right)}_{\frac{\partial \Phi}{\partial v}} dv; \\
&— (x(u+du, v+dv), y(u+du, v+dv)) \simeq (x(u, v), y(u, v)) + \frac{\partial \Phi}{\partial u} du + \frac{\partial \Phi}{\partial v} dv.
\end{aligned}$$

La Figure 1 illustre la scène toute entière tandis que la Figure 2 détaille une dalle élémentaire dont les arêtes $\frac{\partial \Phi}{\partial u} du$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial v} dv$ ressortent. Celle-ci, de forme parallélogramme, supporte une pile de hauteur générique $f(x(u, v), y(u, v))$. La pile découpe donc une calotte quasi plane sur la surface associée à f et repose sur sa base d'aire $d\mathcal{A}$, *non pas* $du dv$, mais désormais

$$d\mathcal{A} = \det\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} du, \frac{\partial \Phi}{\partial v} dv\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} du & \frac{\partial x}{\partial v} dv \\ \frac{\partial y}{\partial u} du & \frac{\partial y}{\partial v} dv \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}_{\frac{d(x,y)}{d(u,v)}} du dv.$$

Apparaît le déterminant de la (transposée de) la matrice jacobienne de Φ , c'est-à-dire la jacobienne du changement de variables, souvent notée $\frac{d(x,y)}{d(u,v)}$ ou $\det(J_\Phi)$ dans la littérature. Le volume algébrique de la pile est ainsi

$$f(x(u, v), y(u, v)) \frac{d(x,y)}{d(u,v)} du dv.$$

Contrairement aux intégrales simples, les intégrales multiples ne sont pas orientées : D et Δ sont des domaines géométriques. Seule la cote f est signée. Cela prête à deux conséquences :

- Les aires élémentaires qui interviennent doivent être comptées positivement, et donc le jacobien évalué en valeur absolue ;
- De ce fait, si le pavage revient sur ses pas, les volumes des piles s'accumulent au lieu de se compenser. On exige alors de Φ d'appliquer bijectivement Δ sur D , éventuellement à quelques détails de mesure nulle près.

Dans ces conditions,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_\Delta f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right| du dv. \quad (3)$$

C'est heureux, tout cela s'étend à trois, quatre, voire n variables. . .

Références

- [1] Karim ZAYANA, Ivan BOYER et Victor RABIET. « L'aire du changement ».
In : *CultureMath* (2021).

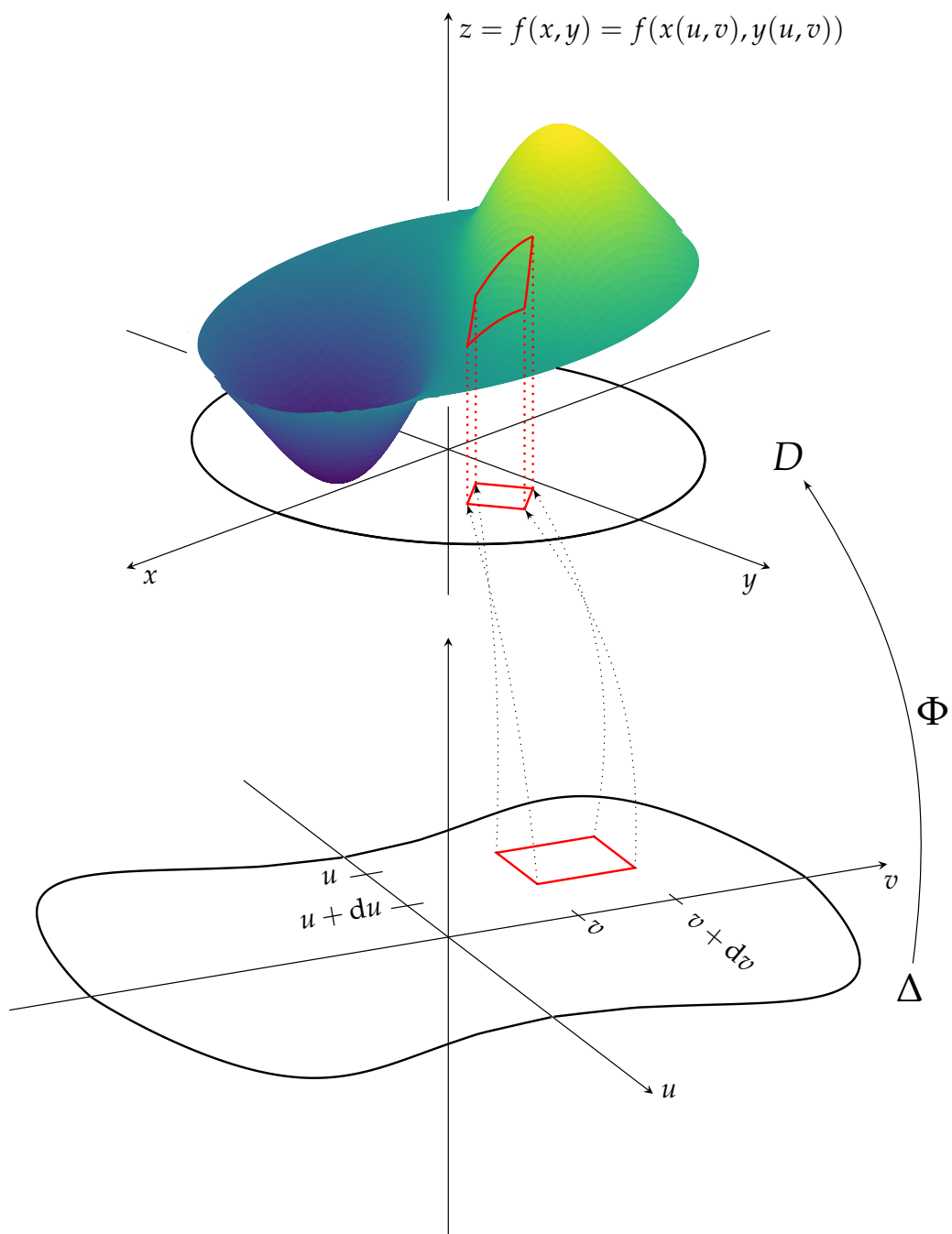


FIGURE 1 – Les secrets du changement de variables avec des intégrales doubles : une nouvelle pile sous la surface ($z = f(x, y) = f(x(u, v), y(u, v))$).

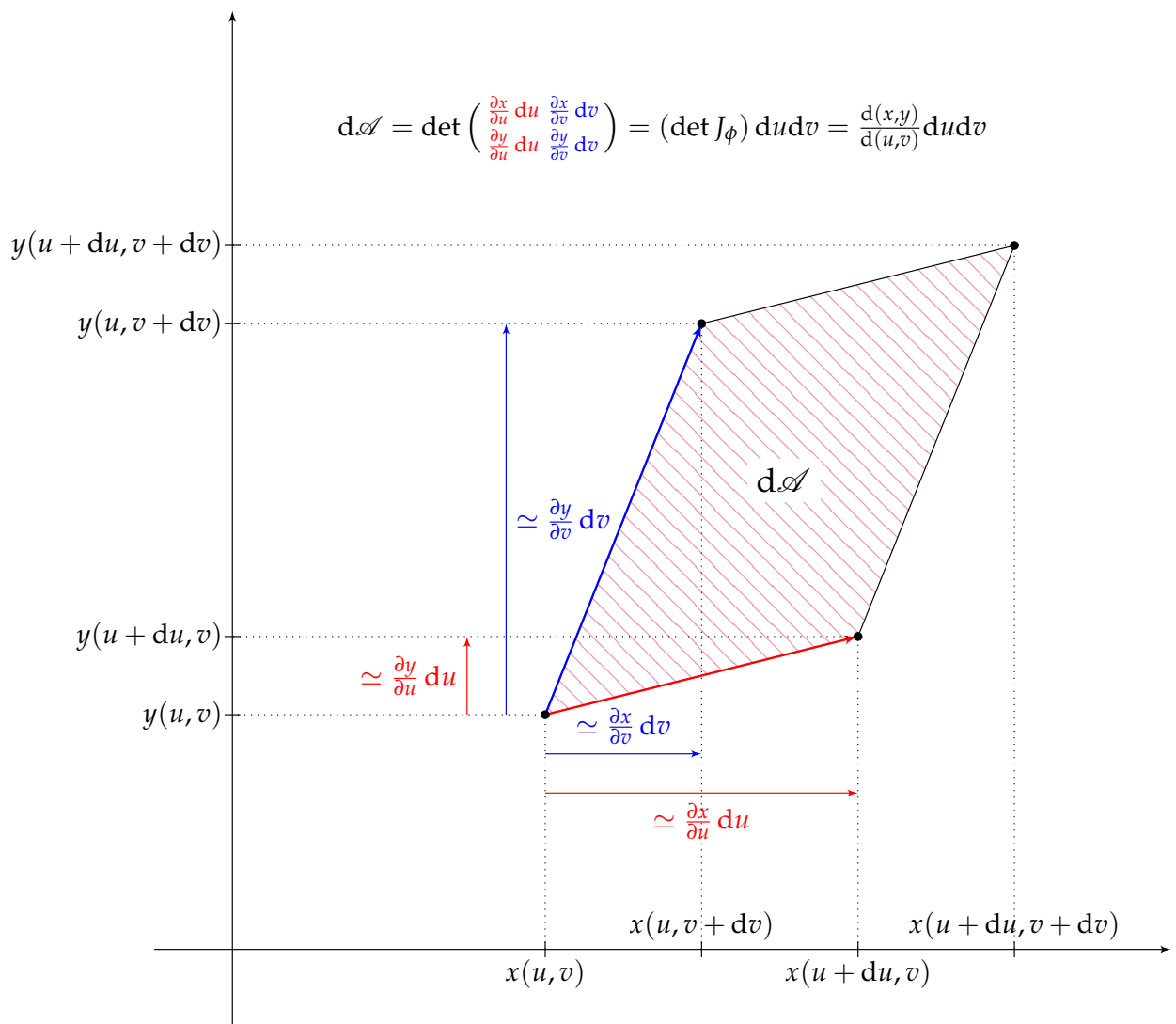


FIGURE 2 – Les secrets du changement de variables avec les intégrales doubles : une dalle sur le nouveau pavage du domaine D .