HAL open science

Préface

Olivier Rioul

To cite this version:

Olivier Rioul. Préface. La théorie mathématique de la communication, Cassini, pp.1-5, 2018. hal-02287931

HAL Id: hal-02287931

https://telecom-paris.hal.science/hal-02287931v1

Submitted on 6 Sep 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CLAUDE SHANNON
WARREN WEAVER

La théorie mathématique de la communication

Traduit de l'anglais par J. Cosnier, G. Dahan, S. Economidès, C. Bellaïche, et O. Rioul

Préface d'Olivier Rioul

Table des matières

Préface **1**
par Olivier Rioul

La théorie mathématique de la communication **9**
par Claude E. Shannon

Introduction 9

I. Systèmes discrets sans bruit **15**

1. Le canal discret sans bruit 15
2. La source d'information discrète 18
3. Les séries d'approximation de l'anglais 23
4. Représentation graphique d'un processus de Markoff . . 25
5. Sources ergodiques et mixtes 27
6. Choix, incertitude et entropie 29
7. L'entropie d'une source d'information 35
8. Représentation des opérations de codage et de décodage . 39
9. Le théorème fondamental pour un canal sans bruit 41
10. Discussion et exemples 45

II. Le canal discret avec bruit **49**

11. Représentation d'un canal discret bruité 49
12. Équivocation et capacité du canal 50
13. Le théorème fondamental pour un canal discret avec bruit 55
14. Discussion 59
15. Exemple d'un canal discret et de sa capacité 61
16. La capacité du canal dans certains cas particuliers 63
17. Un exemple de codage efficace 65

III. Information continue **67**

18. Classes et ensembles de fonctions 67
19. Espaces de fonctions à bande limitée 73
20. Entropie d'une distribution continue 74
21. Entropie d'un ensemble de fonctions 79
22. Perte d'entropie dans des filtres linéaires 81

23. Entropie de la somme de deux ensembles 84

IV. Le canal continu **87**

24. La capacité d'un canal continu 87
25. Capacité d'un canal avec une puissance moyenne limitée 90
26. La capacité d'un canal avec une puissance de crête limitée 95

V. Le débit d'une source continue **101**

27. Fonctions d'évaluation de la fidélité 101
28. Le débit d'une source relatif à un critère de fidélité . . . 105
29. Le calcul des débits 107

Appendices 111

Contributions récentes à la théorie de la communication **125**
par Warren Weaver

1. Note introductive 125
   1.1. Communication 125
   1.2. Les trois niveaux des problèmes de communication 126
   1.3. Commentaires 128
2. Problèmes de communication au niveau A 129
   2.1. Un système de communication et ses problèmes . 129
   2.2. L'information 131
   2.3. Capacité d'un canal de communication 139
   2.4. Le code 140
   2.5. Le bruit 142
   2.6. Messages continus 146
3. Interrelations entre les trois niveaux 148
   3.1. Introduction 148
   3.2. Généralité de la théorie au niveau A 148

Préface

En 1948, Claude Elwood Shannon publie « une théorie mathématique de la communication » (*A Mathematical Theory of Communication*), le fruit de presque dix années de recherche. L'article paraît en deux parties dans les numéros de juillet et d'octobre du *Bell System Technical Journal*, la revue spécialisée des laboratoires Bell. Il s'agit d'un des travaux scientifiques qui ont exercé le plus d'influence dès leur parution, et peu de textes ont eu un impact aussi important dans notre monde moderne. Au début, les résultats de Shannon étaient si originaux que certains ont eu du mal à comprendre leur importance ; mais ils rassemblent tellement d'avancées fondamentales et de coups de génie que Shannon est aujourd'hui le héros de milliers de chercheurs. Par une approche probabiliste où l'entropie joue un rôle central, la théorie décrit mathématiquement la notion d'information et résout complètement les problèmes de compression et de transmission de données en fixant les limites fondamentales de performance. Pour la première fois, on comprend que toute communication fiable doit être essentiellement numérique (digitale).

L'article a rapidement fait l'effet d'une bombe, et sous l'impulsion de Warren Weaver, on a souhaité faire connaître la théorie de Shannon au plus grand nombre, en dépassant le cadre d'une revue spécialisée. L'année suivante, il est re-publié sous forme de livre, précédé d'un exposé introductif de Weaver. À cette occasion, le texte de Shannon reçoit quelques corrections et des références sont mises à jour. Mais le changement qui est à la fois le plus anodin et le plus important concerne le titre : « Une théorie mathématique de la communication » devient « *La* théorie mathématique de la communication » (*The Mathematical Theory of Communication*).

L'exposé de Weaver, « Contributions récentes à la théorie de la communication », dont une forme condensée est publiée la même année dans la revue de vulgarisation scientifique *Scientific American*, est une des nombreuses contributions à la diffusion de la théorie auprès du grand public. Mû par un grand enthousiasme, Weaver y prend en quelque sorte le contre-pied de Shannon : alors que ce dernier écarte d'emblée l'aspect sémantique des messages pour se circonscrire au problème technique de l'ingénieur en communication, Weaver tente d'expliquer comment les idées de Shannon pourraient s'étendre bien au delà de ses objectifs initiaux, à toutes les sciences qui abordent des problèmes de communication au sens large – comme la linguistique et les sciences sociales. Les idées de Warren Weaver, précisément parce qu'elles précèdent le texte de Shannon dans la version originale du livre, ont eu un impact immense : il est probable que de nombreux lecteurs se sont fait leur idée de la théorie en lisant Weaver et se sont arrêtés aux premiers énoncés mathématiques de Shannon. Encore aujourd'hui, on attribue parfois la théorie à Weaver autant qu'à Shannon, et la première édition en français de ce livre par les éditions Retz en 1975 élève même Weaver au rang de premier auteur.

L'exposé de Weaver a ainsi contribué à faire une extraordinaire publicité à la théorie de Shannon qui est vite devenue un domaine à la mode au même titre que la cybernétique ou l'informatique. Mais comme l'a reconnu Shannon lui-même, cette popularité a porté en même temps un élément de danger : dans les années 1950, sa théorie est appliquée, parfois sans discernement, à de nombreux domaines comme la physique fondamentale, la biologie, la linguistique, la psychologie, l'économie et d'autres sciences sociales ; à tel point que Shannon, dans un éditorial intitulé *The Bandwagon* (« Le train en marche ») en mars 1956, met en garde contre les dérives d'une telle popularité.

Depuis ces années, le soufflé est retombé quelque peu, mais la théorie de la communication, aujourd'hui mieux connue sous le nom de *théorie de l'information*, est toujours aussi vivante en tant que discipline mathématique appliquée aux communi-

cations et à d'autres sciences. Avec le recul, on comprend que le texte de Shannon reste intemporel alors que celui de Weaver est un peu tombé en désuétude. Il est symptomatique qu'aujourd'hui, les articles scientifiques du domaine citent presque exclusivement l'article de 1948 (cent mille citations, sept mille par an ces dernières années) au détriment du livre de 1949 (cité un peu plus de deux mille fois seulement depuis sa parution).

Je suis très reconnaissant aux éditions Cassini d'avoir pris la décision, cent ans après la naissance de Shannon, de rééditer la traduction française du livre de Shannon et Weaver. Les erreurs de la traduction initiale de 1975 des éditions Retz ont été corrigées et l'exposé de Weaver est relégué à la fin de l'ouvrage pour son intérêt historique. Cela redonne au texte initial de Shannon sa place d'œuvre mathématique de premier plan.

Dans ce travail, Shannon a choisi délibérément de privilégier la compréhension au détriment de la rigueur, avec un style de rédaction relativement léger, typique de l'époque. Cela permet une lecture aisée du livre et explique sans doute son caractère intemporel. Aujourd'hui, les traités sur la théorie de l'information sont empreints d'une bien plus grande rigueur formelle, mais en regardant de près le texte de Shannon, tous les résultats importants, y compris quelques-uns des plus avancés, y sont déjà présents. La théorie est née entièrement formée !

Un autre signe de la grandeur de ce livre est que ses préceptes fondamentaux nous apparaissent aujourd'hui évidents, alors qu'ils étaient révolutionnaires. Dans le paradigme de la communication que Shannon expose dès les premières pages, un message émis par une source d'information est transmis dans un canal bruité puis reçu par le destinataire : un tel schéma, qui distingue clairement les rôles de l'émetteur et du récepteur, ainsi que du signal et du bruit, nous est complètement naturel aujourd'hui. L'idée même d'une communication numérique est maintenant si courante dans le monde technologique moderne qu'on pourrait se demander pourquoi Shannon a éprouvé la nécessité d'énoncer une chose aussi évidente.

Le cœur de la théorie exposée dans ce livre est la notion d'entropie, et celle d'entropie conditionnelle, appliquées aux sources d'information et aux canaux de transmission. Shannon montre en quoi ces notions sont naturelles et les utilise, grâce au principe de maximum d'entropie, pour démontrer ses théorèmes de codage. À cette occasion, il développe des concepts mathématiques très avancés, sur les suites typiques qui exploitent la loi des grands nombres, et sur les choix aléatoires de codes.

L'influence des théorèmes de Shannon sur le développement des télécommunications n'a pas toujours été évaluée à sa juste mesure, mais a été considérable. Avant Shannon, des moyens de communication comme le télégraphe ont été développés pour ainsi dire dans le brouillard, sans le repère ultime permettant de savoir jusqu'où on peut aller. Avec Shannon, on sait que pour des ressources données, *quoi que l'on fasse*, le meilleur système de communication fiable – avec un taux d'erreurs aussi faible que souhaité – ne pourra jamais dépasser une certaine limite bien déterminée (et calculable) sur le débit d'information. Ce sont les théorèmes de Shannon qui déterminent les limites fondamentales, aussi bien sur le contenu d'information d'une source que sur la capacité de transmission d'un canal. Ils offrent ainsi aux ingénieurs la promesse d'une communication ultime presque sans erreurs, la référence de performance, exprimée en bits par seconde, à laquelle tout système pratique de communication peut se comparer. Sans les formules théoriques de Shannon, les systèmes numériques modernes, des liaisons satellitaires aux disques compacts en passant par la télévision haute définition et l'internet, auraient mis beaucoup plus de temps à se développer. Il a fallu plusieurs décennies avant de voir apparaître des solutions pratiques dont les performances s'approchent des limites établies par Shannon. On peut dire, sans exagérer, que Shannon est le mathématicien dont les théorèmes ont rendu possible le monde du numérique que nous connaissons aujourd'hui.

Mais l'intérêt principal de ce livre réside encore, selon moi, dans son contenu mathématique. L'expérience de la lecture de ce livre est incroyable : le texte de Shannon est tellement élégant ! C'est

une vision profonde et fondamentale, exprimée dans le formalisme mathématique adéquat. On peut apprécier enfin, en langue française, tout son génie et toutes les subtilités de sa délicieuse théorie.

Olivier Rioul